Megoldás. Az egyenlet bal oldalán emeljük ki a-t:

$$a(a^4-a^2+1)=2 \tag{1}$$

Itt $a^4-a^2+1>0$ minden a-ra, mert az a^2-ben másodfokú kifejezés diszkriminánsa $1-4<0$. Ebből következik, hogy $a>0$, hiszen a és a^4-a^2+1 szorzata pozitív.

Ha $0<a\le 1$, akkor $a^5\le 1$, $-a^3<0$, $a\le 1$, tehát $a^5-a^3+a<2$. Így tehát $a>1$.

Rendezzük át az eredeti egyenletet: $a^5+a=2+a^3$. A számtani–mértani közepek közti összefüggés alapján:

$$\frac{a^3+2}{2}=\frac{a^5+a}{2}\ge\sqrt{a^6}=a^3. \tag{2}$$

Ebből $a^3+2\ge 2a^3$, vagyis $a^3\le 2$, azaz $a^6\le 4$. Mivel $a\ne 1$, azaz $a^5\ne a$, (2)-ben nem állhat egyenlőség, így $a^6<4$, a felső becslést igazoltuk.

Az alsó becsléshez szorozzuk meg (1)-et a-val, és fejezzük ki a^6-t:

$$a^6=a^4-a^2+2a.$$

Ha (1)-et a-val osztjuk, akkor pedig $a^4-a^2+1=\dfrac{2}{a}$ adódik. Ezekből:

$$a^6=\frac{2}{a}-1+2a.$$

$\dfrac{2}{a}+2a-1=2\cdot\left(\dfrac{1}{a}+a\right)-1$. Ismét a számtani–mértani közepek között fennálló összefüggés alapján $\dfrac{1}{a}+a\ge 2$, így $a^6\ge 2\cdot 2-1=3$. Egyenlőség $a=\dfrac{1}{a}$, azaz $a=1$ esetén lehetne, de láttuk már, hogy $a>1$, így $a^6>3$.

A két eredmény alapján $3<a^6<4$ minden olyan a esetén, amelyre (1) fennáll.

Megjegyzés. Fölvetődik a kérdés, hogy van-e egyáltalán olyan a érték, amelyre (1) fennáll. Az a^5-a^3+a-2 kifejezés a-nak páratlan fokú polinomja. Mivel $a=1$-ben negatív (-1), $a=2$-ben pozitív, és a polinomfüggvény folytonos, azért 1 és 2 között valahol biztosan felveszi a 0 értéket.