Megoldás. Helyettesítsünk[1] x helyébe $(a+2)$-t:

$$a=\sqrt{4-3\sqrt{4-3\sqrt{10-3a-6}}}=\sqrt{4-3\sqrt{4-3\sqrt{4-3a}}}.$$

Legyen $f(x)=\sqrt{4-3x}$. Azt az a értéket keressük, amelyre $a=f\big(f\big(f(a)\big)\big)$.

Ha $a=f(a)$, akkor ez nyilván teljesül. $a=f(a)$ akkor áll fenn, ha az $a\ge 0$, $a\le\dfrac{4}{3}$ feltételek mellett $a^2+3a-4=0$, amiből $a=1$, tehát $x=3$.

Meg kell vizsgálnunk, hogy ezen kívül van-e még olyan a, amely eleget tesz az $a=f\big(f\big(f(a)\big)\big)$ egyenletnek.

a nem lehet negatív, mert eleme f értékkészletének, ezért elegendő a további a megoldásokat a $[0;1)$, illetve $\left(1;\dfrac{4}{3}\right]$ intervallumokban keresni.

f a $[0;1)$ intervallumból származó az elemeket $(1;2]$ intervallumba viszi, az $\left(1;\dfrac{4}{3}\right]$ intervallumból eredőket pedig $[0;1)$-be.

Ezért $a\in[0;1)$ esetén $f\big(f\big(f(a)\big)\big)\in(1;2]$; $a\in(1;2]$ esetén pedig $f\big(f\big(f(a)\big)\big)\in[0;1)$ (feltéve, hogy értelmes a kifejezés). Ez pedig azt jelenti, hogy az egyenletnek nincs más megoldása.

Megjegyzés. Hiányos az az indoklás, amely szerint

$$a=f\big(f\big(\dots\big(f(a)\dots\big)\big)\big)$$

csak akkor lehetséges, ha $a=f(a)$. Több beküldő egyszerűsítette ily módon a feladat megoldását, természetesen hibásan. Ez még monoton függvények esetén sem feltétlenül igaz. Az $f(x)=-x$ függvény monoton, mégsem igaz, hogy $f\big(f(x)\big)=x$ csak akkor állhat fenn, ha $x=f(x)$ (hiszen $f\big(f(x)\big)=x$ minden x-re). Ugyanígy elképzelhető, hogy $a\ne f(a)$, $a\ne f\big(f(a)\big)$, de $a=f\big(f\big(f(a)\big)\big)$. Ilyen – bár nem monoton – függvényekről szól a **B. 3541.** feladat (KöMaL 2003/2. sz., 89. oldal), ahol a megjegyzésben például az $f(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$ függvény szerepel és módszer is látható ilyen tulajdonságú elsőfokú törtfüggvények készítésére. A **B. 3481.** feladatban vizsgált $f(x)=-\dfrac{2x+7}{x+3}$ függvény is ilyen, éppen ezen a tulajdonságon múlik a feladat megoldása (KöMaL 2002/1. sz., 40. oldal).

[1] Ezzel a helyettesítéssel megkaptuk a **B. 3579.** feladatot, amelynek a megoldása a KöMaL 2003/3. számának 153. oldalán olvasható.