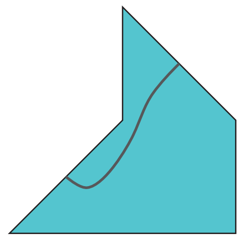
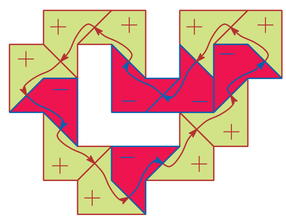
1. megoldás. Megmutatjuk, hogy ilyen téglalap nem létezik. Tételezzük fel, hogy létezik olyan rácstéglalap, amely kicsempézhető, és vegyük ennek egy tetszőleges csempézését.

Minden egyes csempében kössük össze a két $\sqrt{2}$ hosszúságú oldal felezőpontját egy görbével az *1. ábra* szerint; a görbe legyen merőleges a végpontjaiban a két oldalra. Mivel a $\sqrt{2}$ hosszúságú oldalakhoz egy-egy újabb csempe illeszkedik, a görbedarabok egymáshoz csatlakoznak és zárt hurkokat alkotnak.



1. ábra

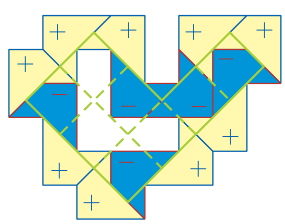
Vegyük az egyik zárt hurkot. Rajzoljunk a hurkot alkotó görbedarabokra egy-egy nyilat a pozitív körüljárás irányában (*2. ábra*). A csempéket két csoportra oszthatjuk: az egyik fajta csempében a görbe „befelé kanyarodik”; az iránya pozitív irányban változik $90°$-ot, a csempék másik csoportjában a görbe „kifelé kanyarodik”, az irány negatív irányban változik $90°$-ot.



2. ábra

Legyen a kifelé kanyarodó görbedarabok száma k. Mivel a görbe iránya összesen $360°$-ot változik pozitív irányban, a befelé kanyarodó szakaszok száma $k+4$.

Cseréljük most ki a görbedarabokat egyenes szakaszokra, és vizsgáljuk meg, hogy az így kapott töröttvonal belsejének mekkora lehet a területe, és ebből mennyit fedhetnek le a csempék (*3. ábra*). A töröttvonal belseje felbontható $\sqrt{2}$ oldalú, átlós helyzetű négyzetekre. Mindegyik ilyen négyzet területe 2, a töröttvonal által bekerített terület tehát páros egész szám.



3. ábra

A befelé kanyarodó csempék területéből $\dfrac{1}{4}$ egység esik a töröttvonal belső oldalára, a kifelé kanyarodó csempék területéből pedig $\dfrac{7}{4}$ egység. Lehetnek olyan csempék is, amelyek teljes egészükben a töröttvonal belsejébe esnek; legyen az ilyen csempék száma b. Ezek mindegyike 2–2 egységnyi területet fed le. Az összes lefedett terület tehát

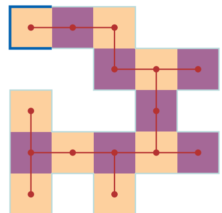
$$(k+4)\cdot\frac{1}{4}+k\cdot\frac{7}{4}+b\cdot 2=2k+2b+1,$$

ami páratlan. A töröttvonal által határolt páros mérőszámú területből tehát a csempék egy páratlan méretű részt fednek le, tehát nem fedhetik le teljesen.

II. megoldás. A megoldáshoz szükségünk lesz a következő **segédtételre:**

Ha az egyszerű, zárt T töröttvonal csak vízszintes és függőleges rácsszakaszokból áll, és a belsejében nincs rácspont, akkor a T által határolt négyzetek között mindig van olyan, amelynek legalább három oldala T-hez tartozik.

Bizonyítás. Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai a T által határolt négyzetek, és kössük össze éllel a szomszédos négyzetekhez tartozó csúcsokat (*4. ábra*). Ez a gráf összefüggő, és nem tartalmazhat kört, mert ha néhány négyzet egy kört alkotna, akkor ennek belsejében lenne olyan rácspont, amelyen T nem megy át. A gráf tehát egy fa. Egy fában mindig van elsőfokú pont. Ha pedig a gráfunk valamelyik pontja legfeljebb elsőfokú, az azt jelenti, hogy a megfelelő négyzetnek legfeljebb csak egy oldalához csatlakozik további négyzet, legalább három oldala pedig T-nek is oldala. Ezzel a segédtételt igazoltuk.

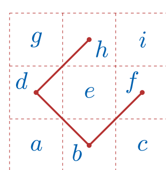


4. ábra

Most tételezzük fel, hogy sikerült a megadott mintával egy téglalapot kicsempézni. Kössük össze ismét mindegyik csempében a $\sqrt{2}$ hosszú oldalak felezőpontjait egy-egy szakasszal. Ezek a szakaszok zárt töröttvonalakat alkotnak, amelyeknek nincs közös pontjuk; két töröttvonal vagy egymáson kívül helyezkedik el, vagy egyikük a belsejében tartalmazza a másikat.

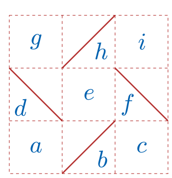
A legkisebb területű töröttvonal nem tartalmazhat a belsejében további töröttvonalat. A belsejét azok a csempék fedik le, amelyek a töröttvonalat alkotják. A továbbiakban megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges. Tegyük fel tehát, hogy létezik a csempéknek egy olyan elrendezése, amelyben a csempékre rajzolt szakaszok egyetlen zárt töröttvonalat alkotnak, és ennek a vonalnak a belsejét a felhasznált csempék teljesen lefedik. Tekintsünk az ilyen elrendezések közül egy olyat, amelyikben a felhasznált csempék száma minimális.

A töröttvonalat alkotó, $\sqrt{2}$ hosszúságú szakaszok egy átlós helyzetű négyzetrács élei mentén haladnak úgy, hogy a töröttvonal belsejében nem maradhat ki rácspont. (Minden bekerített rácspont lefedetlen területet jelentene.) A segédtétel szerint van közöttük három, egymáshoz merőlegesen csatlakozó úgy, hogy az általuk közrefogott négyzet a töröttvonal belsejébe esik. Válasszunk ki három ilyen szakaszt, az ezeket tartalmazó és a szomszédos rácsnégyzeteket pedig betűzzük meg az *5. ábra* szerint.



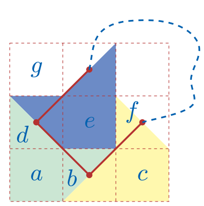
5. ábra

A b, d, f, h mezőket a csempék határai átlósan kettéosztják úgy, hogy a csúcsban szomszédos mezők ellentétes irányban vannak felosztva. A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy ez a *6. ábrán* látható irányokban történik.



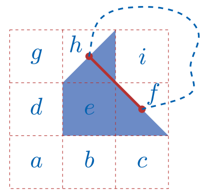
6. ábra

Vizsgáljuk most meg, hogy a bd, bf és dh szakaszok milyen csempékhez tartozhatnak. A bd csempe mindenképpen tartalmazza a b mező bal-felső felét. Ezért a bf csempe a b mezőnek csak a jobb-alsó felét tartalmazhatja, ez a csempe tehát a b mező jobb-alsó feléből, a c mezőből és az f mező bal-alsó feléből áll. Hasonlóan, a dh csempe tartalmazza a d mező jobb-felső felét, ezért a bd csempe a d mező bal-alsó feléből, az a mezőből és a b mező bal-felső feléből áll. Az e mezőt lefedő csempe ezek után csak a d mező jobb-felső és a h mező jobb-alsó felét tartalmazhatja (*7. ábra*).



7. ábra

Módosítsuk a csempézéseket a következőképpen. Hagyjuk el a bd, bf és dh csempéket, és illesszünk be helyettük egy újat a *8. ábra* szerint az e, f, h mezőkre. Ezáltal a csempék száma csökken, és a módosított hurok belsejét továbbra is lefedik a csempék. Találtunk tehát egy még kisebb csemperendszert, amely egyetlen hurokból áll, és amelynek belsejét a csempék lefedik. Ez pedig ellentmond annak, hogy a minimális hurokból indultunk ki. A megadott mintával tehát valóban nem lehet rácstéglalapot kicsempézni.



8. ábra