I. megoldás. Vegyünk fel egy koordinátarendszert úgy, hogy az origója O legyen, az A koordinátái $(a;0)$ legyenek, E pedig az első síknegyedbe essen (*1. ábra*). Ekkor k_b egyenlete $X^2+Y^2=b^2$. Mivel a kör érintője merőleges az érintési pontban húzott sugárra, azért E rajta van OA Thalész körén, amelynek egyenlete:

$$\left(X-\frac{a}{2}\right)^2+Y^2=\frac{a^2}{4}.$$

E koordinátái k_b egyenletét is kielégítik, tehát a két köregyenlet egymásból való kivonásával kapott:

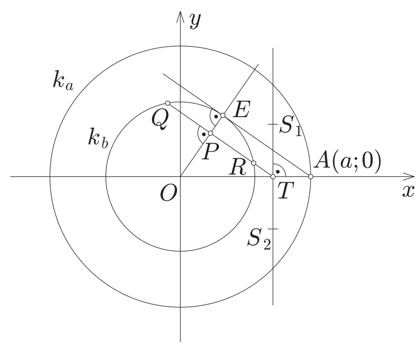
$$-aX+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}-b^2$$

egyenletnek is eleget tesznek. Vagyis E első koordinátája $x=\dfrac{b^2}{a}$, s ezért második koordinátája k_b egyenletéből adódóan:

$$y=\sqrt{b^2-\frac{b^4}{a^2}}=b\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Így az OE egyenes egyenlete

$$OE:\qquad Y=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}X.$$



1. ábra

Ha P első koordinátáját p-vel jelöljük ($p\in\left[0;\dfrac{b^2}{a}\right]$ tetszőleges), akkor második koordinátája OE egyenletéből számolható: $y=p\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. Ezért a P-ben OE-re állított RQ merőleges egyenlete

$$RQ:\qquad Y-\frac{p\sqrt{a^2-b^2}}{b}=\frac{-b}{\sqrt{a^2-b^2}}(X-p).$$

A T pont második koordinátája 0, ezért az előző egyenletből adódóan első koordinátája $x=\dfrac{pa^2}{b^2}$. Ez megegyezik az S_i pontok első koordinátájával is. Mivel a PQ szakasz hossza Pitagorasz tételéből:

$$PQ=\sqrt{OQ^2-OP^2}=\sqrt{b^2-\left(p^2+\frac{p^2(a^2-b^2)}{b^2}\right)}=\sqrt{b^2-\frac{p^2a^2}{b^2}},$$

azért az S_i pontok koordinátái:

$$S_1:\left(\frac{pa^2}{b^2};\sqrt{b^2-\frac{p^2a^2}{b^2}}\right)\qquad\text{és}\qquad S_2:\left(\frac{pa^2}{b^2};-\sqrt{b^2-\frac{p^2a^2}{b^2}}\right).$$

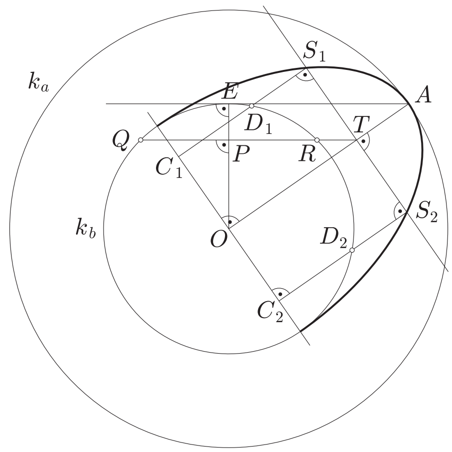
Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\frac{\left(\frac{pa^2}{b^2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(b^2-\frac{p^2a^2}{b^2}\right)}{b^2}=1,$$

tehát az S_i pontok rajta vannak azon az $\mathcal{E}$ ellipszisen, amelynek tengelyei illeszkednek a koordinátarendszer tengelyeire, nagytengelyének hossza $2a$, kistengelyének hossza pedig $2b$.

Megmutatjuk, hogy a keresett mértani hely $\mathcal{E}$-nek azon fele, melyhez tartozó pontok első koordinátája nemnegatív. Mivel p a $\left[0;\dfrac{b^2}{a}\right]$ intervallumban tetszőleges értéket felvehet, azért az S_i pontok első koordinátája 0 és $\left(\dfrac{b^2}{a}\right)\cdot\left(\dfrac{a^2}{b^2}\right)=a$ közt minden értéket felvesz. A fél ellipszis tetszőleges pontja előáll tehát valamely P-hez tartozó S_i pontként.

II. megoldás. Koordináták használata nélkül is megoldható a feladat. Legyen C_i az a pont, amelyre az OTS_iC_i négyszög téglalap, D_i pedig a C_iS_i félegyenes és k_b metszéspontja (*2. ábra*).



2. ábra

Az OPQ és az OC_iD_i háromszögek egybevágóak, mert mindkettő derékszögű és $OD_i = OQ$ $(= b)$ valamint $OC_i = PQ$ $(= S_iT)$. Ezért $OP = C_iD_i$. Mivel PT és EA párhuzamosak, azért a párhuzamos szelők tétele szerint $OA : OE = OT : OP$. Felhasználva az előbb belátott egyenlőségeket, aránypárunkat átírhatjuk

$$\frac{a}{b} = \frac{C_iS_i}{C_iD_i}$$

alakba. Ez azt jelenti, hogy az S_i pont előáll úgy, mint a D_i pont képe annál a φ merőleges tengelyes affinitásnál, amelynek tengelye OC_i, aránya pedig $\frac{a}{b}$.

Mivel az OC_i egyenes az OA-ra O-ban állított merőleges, azért helyzete nem függ C_i-től. Az S_i pontok mértani helye tehát megegyezik a D_i pontok mértani helyének φ-nél származó képével. A D_i-k mértani helye a k_b körnek az a fele, amelyik az OC_i egyenes által meghatározott zárt félsíkok közül az A-t tartalmazóba esik. Mivel egy kör képe merőleges tengelyes affinitásnál ellipszis, azért k_b képe φ-nél az az $\mathcal{E}$ ellipszis, melynek tengelyei illeszkednek az OA, illetve az OC_i egyenesekre, nagytengelyének hossza $2a$, kistengelyének hossza pedig $2b$.

A keresett mértani hely $\mathcal{E}$-nek az a fele, amelyik az OC_i egyenes által meghatározott félsíkok közül az A-t tartalmazó zárt félsíkba esik.