Megoldás. Írjuk fel a $\left(3+\sqrt{7}\right)^{2004}+\left(3-\sqrt{7}\right)^{2004}$ összeget a binomiális tétel felhasználásával:

$$\left(3+\sqrt{7}\right)^{2004}+\left(3-\sqrt{7}\right)^{2004}=$$

$$=\binom{2004}{0}\cdot 3^{2004}+\binom{2004}{1}\cdot 3^{2003}\cdot\sqrt{7}+\binom{2004}{2}\cdot 3^{2002}\cdot\sqrt{7}^2+\ldots+$$

$$+\binom{2004}{0}\cdot 3^{2004}-\binom{2004}{1}\cdot 3^{2003}\cdot\sqrt{7}+\binom{2004}{2}\cdot 3^{2002}\cdot\sqrt{7}^2+\ldots.$$

Látható, hogy azok a tagok, amelyekben $\sqrt{7}$ páratlan hatványon szerepel, kiesnek, mert ellentétes előjellel szerepelnek a két kifejezésben. A páros kitevőn szereplő hatványok pedig egészek.

$\left(3+\sqrt{7}\right)^{2004}+\left(3-\sqrt{7}\right)^{2004}$ tehát egész szám.

$3-\sqrt{7}<1$, ezért $\left(3-\sqrt{7}\right)^{2004}<1$, tehát $\left(3+\sqrt{7}\right)^{2004}$ tizedesvessző előtti számjegye a $\left(3+\sqrt{7}\right)^{2004}+\left(3-\sqrt{7}\right)^{2004}$ szám egyes helyiértékén álló számjegynél 1-gyel kisebb. (Ha az egész szám 0-ra végződik, akkor persze 9.)

$$\left(3+\sqrt{7}\right)^{2004}+\left(3-\sqrt{7}\right)^{2004}=\left(\left(3+\sqrt{7}\right)^3\right)^{668}+\left(\left(3-\sqrt{7}\right)^3\right)^{668}=$$

$$=\left(27+27\cdot\sqrt{7}+9\cdot 7+7\sqrt{7}\right)^{668}+\left(27-27\cdot\sqrt{7}+9\cdot 7-7\sqrt{7}\right)^{668}=$$

$$=\left(90+34\sqrt{7}\right)^{668}+\left(90-34\sqrt{7}\right)^{668}.$$

Ahogyan azt az előzőkben már láttuk, a $\sqrt{7}$-et tartalmazó tagok a két összegben ellentétes előjellel szerepelnek, így ki fognak esni, a páros kitevőjű tagok pedig kétszer szerepelnek.

$$\left(90+34\sqrt{7}\right)^{668}+\left(90-34\sqrt{7}\right)^{668}=$$

$$=\sum_{n=0}^{668}\binom{668}{n}90^{668-n}\cdot 34^n\cdot\sqrt{7}^n+\sum_{n=0}^{668}(-1)^n\cdot\binom{668}{n}90^{668-n}\cdot 34^n\cdot\sqrt{7}^n=$$

$$=\sum_{k=0}^{334}2\cdot\binom{668}{2k}90^{668-2k}\cdot 34^{2k}\cdot 7^k=2\cdot\sum_{k=0}^{334}\binom{668}{2k}90^{668-2k}\cdot 34^{2k}\cdot 7^k.$$

Az összegben szereplő tagok – a $k=334$ kivételével – a 90-et valódi szorzótényezőként tartalmazzák, ezért 0-ra végződnek. $k=334$ esetén az összeadandó

$$2\cdot\binom{668}{668}\cdot 90^0\cdot 34^{668}\cdot 7^{334}.$$

$2\cdot 34^{668}\cdot 7^{334}$ utolsó számjegyére vagyunk kíváncsiak.

34 minden párosadik hatványa 6-ra (páratlanadik hatványa 4-re) végződik. 7 hatványai rendre $7, 9, 3, 1$ végződésűek. A 334 néggyel osztva 2 maradékot ad, így 7^{334} utolsó számjegye 9. Eszerint az utolsó tag utolsó számjegye $2\cdot 6\cdot 9=108$ utolsó számjegyével, 8-cal egyenlő.

A $\left(3+\sqrt{7}\right)^{2004}$ számban a tizedesvessző előtt 7 áll.