I. megoldás. Írjuk fel a számtani és mértani közepek közötti összefüggést a következő értékekre: $\sqrt{a}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{b}$. (Ezek biztosan pozitívak, hiszen a és b is pozitív.)

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}}{5} \geq \sqrt[5]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}},$$

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség. (Egyenlőség $\sqrt{a}=\sqrt[3]{b}$ esetén teljesül.)

Megjegyzés. Bizonyítható egy általánosabb állítás is: Ha $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pozitív egészek, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pedig nemnegatív valós számok, akkor

$$\frac{n_1\cdot\sqrt[n_1]{a_1}+n_2\cdot\sqrt[n_2]{a_2}+\ldots+n_k\cdot\sqrt[n_k]{a_k}}{n_1+n_2+\ldots+n_k} \geq \sqrt[n_1+n_2+\ldots+n_k]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}\,.$$

Ez is a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség miatt teljesül, hiszen a bal oldal számlálóját felbonthatjuk egy $(n_1+n_2+\ldots+n_k)$ tagú összegre, a jobb oldalon a gyök alatt lévő szorzatot pedig ugyanezen tagok szorzatára. Egyenlőség itt is akkor van, ha $\sqrt[n_1]{a_1}=\sqrt[n_2]{a_2}=\ldots=\sqrt[n_k]{a_k}$.

II. megoldás.

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}, \quad \text{ha} \quad a>0,\ b>0 \iff 2\sqrt[30]{a^{15}}+3\sqrt[30]{b^{10}} \geq 5\sqrt[30]{a^6b^6} \iff$$

$$\iff 2\sqrt[30]{\frac{a^{15}}{b^{10}}}+3 \geq 5\sqrt[30]{\frac{a^6}{b^4}} \iff 2\sqrt[30]{\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^5}+3 \geq 5\sqrt[30]{\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^2} \iff$$

$$\iff 2\left(\sqrt[30]{\frac{a^3}{b^2}}\right)^5+3 \geq 5\left(\sqrt[30]{\frac{a^3}{b^2}}\right)^2.$$

Legyen $\sqrt[30]{\frac{a^3}{b^2}}=x$, ekkor a bizonyítandó állítás:

$$2x^5+3 \geq 5x^2 \iff 2x^5-5x^2+3 \geq 0.$$

$$2x^5-5x^2+3 = 2x^5-2x^4+2x^4-2x^3+2x^3-2x^2-3x^2+3x-3x+3 =$$

$$= (x-1)(2x^4+2x^3+2x^2-3x-3) =$$

$$= (x-1)(2x^4-2x^3+4x^3-4x^2+6x^2-6x+3x-3) =$$

$$= (x-1)^2(2x^3+4x^2+6x+3).$$

Mivel $a>0$ és $b>0$, azért $x>0$, így $2x^3+4x^2+6x+3>0$.
Mivel $(x-1)^2 \geq 0$, tehát $(x-1)^2(2x^3+4x^2+6x+3)=2x^5-5x^2+3 \geq 0$.
Mivel $a>0$ és $b>0$, így végig ekvivalens lépéseket végeztem, tehát igaz az egyenlőtlenség.