Megoldás. Legyen $p(x)$ n-edfokú polinom, amelyre teljesül a feladat feltétele.

Ha $n = 0$, akkor $p(x) \equiv c$ és $p(x+1) \equiv c$. A feltétel szerint

$$c \cdot c = c, \quad \text{ahonnan} \quad c = 0 \quad \text{vagy} \quad c = 1.$$

Tehát $p(x) \equiv 0$, vagy $p(x) \equiv 1$.

Ha $n = 1$, akkor $p(x) = ax + b$, ekkor $p(x+1) = ax + a + b$, ahol $a \neq 0$. Behelyettesítve

$$(ax+b)(ax+a+b) = a(x+ax+b)+b,$$

$$a^2x^2 + abx + a^2x + ab + abx + b^2 = ax + a^2x + ab + b,$$

$$a^2x^2 + (a^2+2ab)x + b^2 = (a^2+a)x + b.$$

A két polinom csak $a = 0$ esetén egyezhetne meg, de $a \neq 0$. Tehát $p(x)$ nem lehet elsőfokú.

Ha $n > 1$, akkor $p(x)$ n-edfokú, $p(x+1)$ n-edfokú, $p(x) \cdot p(x+1)$ $2n$-edfokú. $x + p(x)$ n-edfokú, $p\big(x+p(x)\big)$ n^2-edfokú. Mivel a két polinom egyenlő, azért $n^2 = 2n$, tehát ha $n > 1$, akkor $n = 2$, a polinom másodfokú.

Legyen $p(x) = ax^2 + bx + c$, ahol $a \neq 0$. Nézzük, mit jelent a feltétel:

$$p\big(x+p(x)\big) = a\big(x+p(x)\big)^2 + b\big(x+p(x)\big) + c =$$
$$= ax^2 + 2axp(x) + ap^2(x) + bx + bp(x) + c.$$

Ha ez azonos a $p(x) \cdot p(x+1)$ polinommal, akkor

$$p(x) \cdot \big[a(x+1)^2 + b(x+1) + c - 2ax - ap(x) - b\big] \equiv ax^2 + bx + c \equiv p(x),$$

azaz $p(x) \cdot \big[ax^2 + 2ax + a + bx + b + c - 2ax - ap(x) - b - 1\big]$ az azonosan nulla polinom. Mivel $p(x)$ másodfokú, azért a második tényező azonosan nulla:

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{p(x)} + a - ap(x) - 1 = 0.$$

Szorzattá alakítva $(1-a)\big(p(x)-1\big)$ azonosan nulla. Mivel $p(x)$ másodfokú, ez csak úgy lehetséges, ha $a = 1$. Ekkor $p(x) = x^2 + bx + c$, ahol b és c tetszőleges valós számok. Mivel lépéseink megfordíthatók, azért ebben az esetben teljesül az egyenlőség.

Tehát a feladat feltételeinek megfelelő polinomok: $p(x) = 0$, $p(x) = 1$ és $p(x) = x^2 + bx + c$.