Megoldás. Jelöljük a konvex testet határoló ötszöglapok számát ℓ_5-tel és a hatszöglapok számát ℓ_6-tal. A testnek $\ell = \ell_5 + \ell_6$ lapja van.

Mivel minden ötszöget öt él és minden hatszöget hat él határol, a test éleinek a száma $e = \dfrac{5\ell_5 + 6\ell_6}{2}$, hiszen a konvexitás miatt minden él mentén pontosan két lap találkozik, így minden élet kétszer számoltunk $(5\ell_5 + 6\ell_6)$-ban.

Mivel minden ötszögnek öt csúcsa és minden hatszögnek hat csúcsa van, azért a test csúcsainak a száma $c = \dfrac{5\ell_5 + 6\ell_6}{3}$, mivel a feladat feltétele szerint minden csúcsban pontosan három lap találkozik; így minden csúcsot háromszor számoltunk $(5\ell_5 + 6\ell_6)$-ban.

Euler tétele érvényes minden konvex poliéderre:

$$\ell + c = e + 2.$$

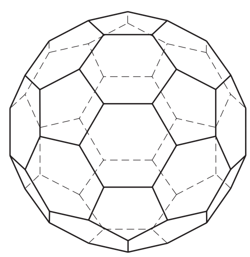
Ide behelyettesítve a fentieket:

$$\ell_5 + \ell_6 + \frac{5\ell_5 + 6\ell_6}{3} = \frac{5\ell_5 + 6\ell_6}{2} + 2.$$

Innen kapjuk, hogy $\ell_5 = 12$, tehát a poliédernek 12 ötszöglapja van.

Mivel minden ötszögnek öt hatszöggel és minden hatszögnek három ötszöggel van közös éle, azért a hatszöglapok száma $\dfrac{5\ell_5}{3}$, hiszen $5\ell_5$-ben minden hatszöglapot háromszor számoltunk.

$$\ell_6 = \frac{5\ell_5}{3} = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20$$



Tehát a feladatban leírt testnek $\ell = \ell_5 + \ell_6 = 12 + 20 = 32$ lapja van. (A hagyományos bőr focilabdákat is ilyen és ennyi bőrdarabból varrják össze.)

Megjegyzés. Egy ilyen test konstrukciója megtalálható Nagy Gyula: *Focilabda (5,6,6)* című cikkében (KöMaL, 1996/5., 268. oldal).