

**I. megoldás.** A fizetendő és a visszajáró összeg is háromjegyű (nem feltétlenül különböző jegyekből álló) egész szám. Jelölje  $abc$  a fizetendő összeget. A visszajáró összegben az  $a, b, c$  számok valamilyen – az előzőtől különböző – sorrendben fordulnak elő. Ezek a következők lehetnek:

$$a, c, b; \quad b, a, c; \quad b, c, a; \quad c, a, b; \quad \text{és} \quad c, b, a.$$

Vizsgáljuk meg külön-külön ezeket az eseteket.

$$1. \quad \begin{array}{r} a \ b \ c \\ + \ a \ c \ b \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Ekkor vagy  $b + c = 0$  miatt  $b = c = 0$  és ekkor  $a = 5$ , de itt a számok sorrendje nem különböző; vagy  $b + c = 10$ , de ekkor az 1 maradék miatt a  $b + c + 1$  összeg nem végződhetne 0-ra. Ez tehát nem lehetséges.

$$2. \quad \begin{array}{r} a \ b \ c \\ + \ b \ a \ c \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Innen vagy  $c = 0$ , ez nem lehetséges, mert akkor  $b + a = 10$  és  $a + b + 1 = 10$  lenne; vagy  $c = 5$  és  $b + a + 1 = 10$  miatt  $b + a = 9$ , a számjegyek összege pedig  $9 + 5 = 14$ .

$$3. \quad \begin{array}{r} a \ b \ c \\ + \ b \ c \ a \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Innen  $c + a = 10$ ,  $c + b + 1 = 10$ , ahonnan  $a - b = 1$ , és  $a + b + 1 = 10$  miatt  $a + b = 9$ . Az egyenletrendszerből  $a = 5$ ,  $c = 5$ ,  $b = 4$ , a számjegyösszeg 14.

$$4. \quad \begin{array}{r} a \ b \ c \\ + \ c \ a \ b \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Az előzőekhez hasonlóan  $b + c = 10$ ,  $a + b = 9$ , és  $a + c = 9$ , ahonnan  $a = 4$ ,  $b = 5$  és  $c = 5$ , a számjegyösszeg 14.

$$5. \quad \begin{array}{r} a \ b \ c \\ + \ c \ b \ a \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Végül  $a$  és  $c$  nem lehet egyszerre 0, mert akkor nem kaphatnánk háromjegyű számot. Ha viszont  $a + c = 10$ , akkor  $2b + 1 = 10$  nem lehetséges.

Láthatjuk, hogy ha van megoldás, például 365 és 635, akkor a számjegyek összege 14.

**II. megoldás.** Jelölje a vételárát  $A$ , az  $A$  számjegyeinek az összegét pedig  $S(A)$ . A feltétel szerint  $A$  és  $1000 - A$  ugyanazokból a jegyekből állnak. Először megmutatjuk, hogy ekkor  $A$  utolsó jegye nem lehet 0. Ha ez volna a helyzet, akkor az  $A$  első két jegyéből álló  $\overline{xy} = 10x + y$  kétjegyű számra  $100 - \overline{xy}$  is ugyanezekből a jegyekből áll, csak fordított sorrendben. Ez viszont nem lehetséges, hiszen  $10x + y + 10y + x = 11(x + y)$  és ez a 11-gyel osztható összeg nem lehet egyenlő 100-zal.

Ha  $A$  utolsó jegye nem 0, akkor  $S(1000 - A) = 1 + S(999 - A)$ . Mivel a  $999 - A$  kivonást helyiértékenként átvitel nélkül végezhetjük el, azért  $S(999 - A) = 3 \cdot 9 - S(A) = 27 - S(A)$ , tehát  $S(1000 - A) = 1 + 27 - S(A)$ . Mivel  $A$  és  $1000 - A$  jegyei azonosak, így  $S(A) = S(1000 - A) = 28 - S(A)$ , azaz  $S(A) = 14$ .

A feladatban leírt háromjegyű számok jegyeinek összege tehát 14. Ilyen szám létezik, például a 365.

*Megjegyzés.* Az nem igaz, hogy ha  $S(A) = 14$ , akkor  $A$  a feladat feltételeinek megfelelő háromjegyű szám, például  $A = 536$  esetén  $1000 - A$  az  $A$  jegyeinek átrendezésével kapott számok mindegyikétől különbözik.