I. megoldás. Osszuk a vendégeket két csoportba aszerint, hogy 4-nél kevesebb vagy több ismeretséget szereztek. Ekkor az első csoport négy tagja összesen $1+2+3+3=9$, a többiek pedig $5+6+6+6=23$ ismeretséget szereztek az este folyamán.

A vendégség során kialakult ismeretségeket különböztessük meg aszerint, hogy azonos vagy pedig különböző csoportba tartozók kötötték-e: hívjuk az előbbieket belső, utóbbiakat pedig külső ismeretségnek. Egy csoport tagjai által kötött ismeretségek összege a külső kapcsolatok számának és a belső kapcsolatok kétszeresének az összege, hiszen a csoporton belül egy belső ismeretség 2, egy külső pedig 1 ismeretséget jelent. Nyilvánvaló továbbá, hogy a két csoport külső ismeretségeinek a száma egyenlő. Ekkor

$$9=2B_1+K, \tag{1}$$

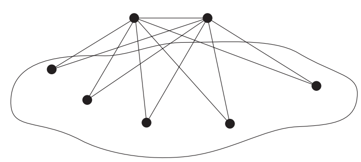
$$23=2B_2+K. \tag{2}$$

A két egyenlet különbségét 2-vel osztva $B_2-B_1=7$ adódik. Egy négytagú társaságban viszont legfeljebb 6 ismeretség köthető, ezért $0\le B_1,B_2\le 6$, tehát $B_2-B_1=7$ nem lehetséges. A kapott ellentmondás mutatja, hogy valamelyik résztvevő tévedett.

Megjegyzés. Ha a társaság tagjait pontokkal, a köztük fennálló ismeretségeket pedig a pontokat összekötő szakaszokkal ábrázoljuk, akkor egy úgynevezett gráfhoz jutunk. Az alábbi megoldás ezt a szemléltetést és a gráfelmélet szóhasználatát követi.

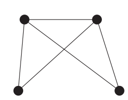
II. megoldás. Hagyjuk el a gráfból az elsőfokú csúcsot a belőle kiinduló éllel együtt. Ha az él másik végpontja eredetileg 6-odfokú, akkor a kapott 7 csúcsú gráfban az egyes csúcsok fokszámai rendre: 2, 3, 3, 5, 5, 6, 6.

Ebben a gráfban a két 6 fokszámú csúcsból minden további csúcsba megy él (*1. ábra*). Ezt a két csúcsot és a belőlük kilépő éleket elhagyva olyan 5 csúcsú gráfhoz jutunk, ahol az egyes csúcsok fokszáma rendre: 0, 1, 1, 3, 3.



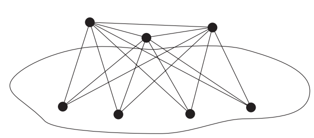
1. ábra

A 0 fokú csúcsot elhagyva négy csúcs marad, köztük két harmadfokú. A másik két csúcs tehát legalább másodfokú (*2. ábra*), ami nem teljesül.



2. ábra

Meg kell még vizsgálnunk azt az esetet, amikor az elsőnek elhagyott él másik végpontja legfeljebb 5-ödfokú. Ekkor a megmaradt gráfban három 6-odfokú csúcs van. Mind a négy további csúcs ezekkel össze van kötve, tehát mindegyikük legalább harmadfokú (*3. ábra*). Ez viszont nem lehetséges, ugyanis mielőtt egyikük 1-gyel csökkent volna, a négy fokszám értéke 2, 3, 3 és 5 volt. Nem létezik tehát az adott tulajdonságú gráf, valamelyik résztvevő hibás értéket közölt.



3. ábra