I. megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy egy rögzített d szám hányszor lép fel $(i;j)$-ként a feladatbeli összegben! Világos, hogy ha $(i;j)=d$, akkor $\frac{i}{d}$ és $\frac{j}{d}$ relatív prímek, továbbá mindkettő az $\left[1;\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right]$ intervallumba esik, ahol $\lfloor n\rfloor$ az n alsó egészrészét jelöli.

Másfelől, ha $i',j'\in\left[1;\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right]$ relatív prímek, akkor $i:=i'\cdot d$, ill. $j:=j'\cdot d$ esetén $(i;j)=d$ és $i,j\in[1;n]$. A feladatbeli egyenlőtlenség bal oldalán álló mennyiséget $f(n)$-nel jelölve, a fenti gondolatmenet formálisan az alábbi összeg átrendezése:

$$f(n):=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i;j)=\sum_{d=1}^{n}\sum_{\substack{(i;j)=d,\\ 1\le i\le n,\\ 1\le j\le n}}d=\sum_{d=1}^{n}\sum_{\substack{(i;j)=1,\\ 1\le i\le \frac{n}{d},\\ 1\le j\le \frac{n}{d}}}d=\sum_{d=1}^{n}d\cdot g\left(\frac{n}{d}\right), \tag{1}$$

ahol $g(x)$ az 1 és x közé eső számokból alkotható relatív prím számpárok száma. A továbbiakban $g(x)$ értékét fogjuk megbecsülni, pontosabban igazoljuk, hogy

$$g(x)\ge\frac{x^2}{100}. \tag{2}$$

Mivel az $(1;1)$ számpár megfelelő, ezért $x\le 10$ esetén (2) triviálisan teljesül. A becslés úgy adódik, hogy az összes számpárok számából minden d-re kivonjuk azon számpárok számát, melyeknek d közös osztója. Azaz,

$$g(x)\ge\lfloor x\rfloor^2-\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor^2-\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor^2-\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor^2-\ldots>\left(\frac{9x}{10}\right)^2-\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^2}{3^2}-\frac{x^2}{4^2}-\ldots>$$
$$>x^2\left(\frac{81}{100}-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}\ldots\right)\right)=$$
$$=x^2\left(\frac{81}{100}-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\ldots\right)\right)\ge x^2\left(\frac{81}{100}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)>\frac{x^2}{100}.$$

A becslést (1)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$f(n)=\sum_{d=1}^{n}d\cdot g\left(\frac{n}{d}\right)\ge\sum_{d=1}^{n}d\cdot\frac{n^2}{100\cdot d^2}=\frac{n^2}{100}\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d} \tag{3}$$

Ismert, hogy a harmonikus sor divergens, ezért valamely N-re $\sum_{d=1}^{N}\frac{1}{d}>400$ teljesül (például $N=2^{800}$ megfelel), így $n\ge N$-re (3) alapján

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i;j)=f(n)\ge\frac{n^2}{100}\cdot 400=4n^2,$$

amint azt bizonyítanunk kellett. $\square$

Megjegyzések. 1. A bizonyításból látható, hogy a feladatbeli becslés jobb oldalán álló 4-es szorzó tetszőleges konstanssal helyettesíthető azon az áron, hogy megnő az a legnagyobb egész, melyre a feladatbeli egyenlőtlenség még nem teljesül.

2. Mélyebb számelméleti ismereteket felhasználva megmutatható, hogy a megoldásban szereplő $g(x)$ függvény aszimptotikusan $\frac{6}{\pi^2}x^2$, ahonnan a feladatban szereplő $f(n)$ összeg értéke aszimptotikusan $\frac{6}{\pi^2}x^2\log x$-nek adódik.

3. A legtöbb megoldó a fentinél kevésbé elemi, a prímek reciprokösszegének divergenciájára építő megoldást talált. Az alábbiakban vázoljuk ezt a gondolatmenetet.

II. megoldás. Az $(i;j)$ legnagyobb közös osztót az i, j számok közös prímosztóinak összegével becsüljük. Legyenek $p_1<p_2<\ldots<p_k$ mindazon prímek, melyek az i és j számokat egyaránt osztják. Mivel bármely szóban forgó prím legalább 2, ezért

$$(i;j)\ge p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k\ge p_1+p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k\ge \tag{4}$$
$$\ge p_1+p_2+p_3\cdot\ldots\cdot p_k\ge\ldots\ge p_1+p_2+\ldots+p_k$$

teljesül. Jól ismert, hogy a prímek reciprokösszege ∞-hez tart, így létezik olyan N szám, melyre az 1 és N közti prímek reciprokösszege nagyobb, mint 6. Ha tehát $n\ge N$, akkor (4) alapján az I. megoldásban definiált $f(n)$-t az alábbi módon becsülhetjük:

$$f(n) \geq \sum_{p \text{ prím}} \sum_{p|(i;j)} p = \sum_{p \text{ prím}} p \cdot \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor^2 \geq \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq n}} p \left(\frac{n}{p} - 1 \right)^2 =$$

$$= \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq n}} \left(\frac{n^2}{p} - 2n + p \right) > -2n^2 + n^2 \cdot \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq n}} \frac{1}{p} \geq -2n^2 + n^2 \cdot \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq N}} \frac{1}{p} \geq$$

$$\geq -2n^2 + 6n^2 = 4n^2. \quad \square$$