Megoldás. Rögzítsük G egy 3-színezését, melyben az egyes színekre színezett csúcsok száma (azaz a színosztályok mérete) n_1, n_2, illetve n_3. Világos, hogy $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

Tegyük fel, hogy két színosztály (mondjuk a piros és a zöld) nem feszít G-ben összefüggő gráfot, azaz a piros és zöld csúcsok között futó élek alkotta részgráfnak legalább két komponense van. Amennyiben e komponensek valamelyikén a színeket felcseréljük (vagyis ezen a komponensen belül a korábban zöld csúcsok pirosak lesznek, a pirosak pedig zöldek), úgy továbbra is igaz marad, hogy G bármely élének végpontjai különböző színűek. A cserével tehát G egy olyan 3-színezéséhez jutunk, melynek színosztályai másképpen osztják három csoportra G csúcsait, mint az eredeti színezés színosztályai. Ezért az új 3-színezésben vagy két, korábban azonos színű pont különböző színt kapott, vagy két, korábban különböző színű pont azonos színű lett, esetleg mindkét változásra sor kerülhetett. Ez ellentmond annak, hogy G egyértelműen színezhető 3 színnel, vagyis G bármely két színosztálya összefüggő gráfot feszít.

Ismert, hogy egy összefügő gráf élszáma legfeljebb 1-gyel kevesebb, mint pontjainak száma, ezért az első két színosztály legalább $n_1 + n_2 - 1$, a második és harmadik színosztály legalább $n_2 + n_3 - 1$, míg az első és harmadik színosztály legalább $n_1 + n_3 - 1$ különböző élt tartalmaz. Az említett élek egymástól is különböznek, ezért G élszámára az $(n_1 + n_2 - 1) + (n_2 + n_3 - 1) + (n_3 + n_1 - 1) = 2n - 3$ alsó becslést kapjuk. $\square$

Megjegyzések. 1. Többen próbálták a feladatot teljes indukcióval megoldani: az állítás 3-pontú gráfokra világos, tegyük fel, hogy a legfeljebb $(n-1)$-pontú gráfokra már bizonyítottuk a becslést. Ha az n-pontú, egyértelműen 3-színezhető G gráfnak minden csúcsa legalább 4-edfokú, akkor élszáma legalább $2n$, így az állítás igaz. Ha van G-nek másodfokú csúcsa, akkor annak törlésével (mint az könnyen látható) egy egyértelműen 3-színezhető gráf keletkezik, melyre igaz az indukciós feltevés: legalább $2(n-1) - 3 = 2n - 5$ éle van, ezért G élszáma nem kevesebb, mint $2n - 5 + 2 = 2n - 3$. Az elintézetlen eset az, amikor G-ben a minimális fokszám 3. Sajnos, ha G egy harmadfokú v csúcsát elhagyjuk, a maradék $G - v$ gráf nem lesz feltétlenül egyértelműen 3-színezhető: elképzelhető ugyanis $G - v$-nek olyan 3-színezése, melyben v szomszédai különböző színeket kapnak. Ha ezt követően pl. összehúzzuk v két azonos színű szomszédját, akkor a kapott gráf már egyértelműen 3-színezhető, azonban csupán 3-mal kevesebb éle van, mint G-nek. Az indukciós bizonyításhoz pedig legalább 4-gyel kevesebb élre volna szükség.

A bizottság nem ismer a fenti gondolatmenetet teljes indukciós bizonyítássá kiegészítő érvelést.

2. Többen igazolták, hogy a feladatban adott korlát elérhető. Világos, hogy a 3-pontú teljes gráf egyértelműen 3-színezhető, és $(2n-3)$ éle van. Az is könnyen látszik, hogy ha egy egyértelműen 3-színezhető G gráfhoz hozzáveszünk egy új pontot, melyet G két különböző színű pontjával kötünk össze, akkor újabb egyértelműen 3-színezhető gráfot kapunk, melyre a becslés pontos lesz, ha már G-re is az volt.

3. A feladat megoldása értelemszerű módosításokkal kiterjeszthető egyértelműen k-színezhető gráfok élszámának becslésére is, azaz megmutatható, hogy tetszőleges egyértelműen k-színezhető gráfnak legalább $(k-1)(n-k) + \binom{k}{2}$ éle van. A 2. megjegyzés is kiterjeszthető: a k-pontú teljes gráf egyértelműen k-színezhető, és egy egyértelműen k-színezhető gráfhoz új pontot hozzávéve és $k-1$ különböző színű ponttal összekötve ismét egyértelműen k-színezhető gráfot kapunk.

4. Akkor is alkalmazható a módszerünk, ha nem az *egyértelműen* k-színezhető gráfok élszámát akarjuk megbecsülni, hanem csupán felső korlátunk van G k-színezéseinek számára. A megoldás gondolatmenetével felső becslést kaphatunk két színosztály által feszített komponensek számára, innen pedig a két komponens által feszített élek száma alulról becsülhető.