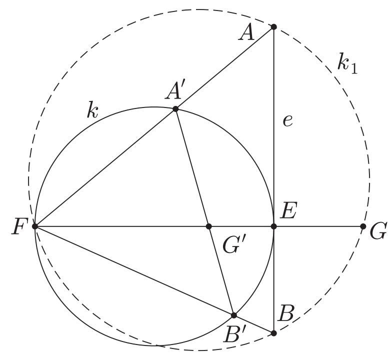
I. megoldás. Legyen az ABF háromszög köré írt k_1 kör és az EF egyenes F-től különböző metszéspontja G. Az E pontnak k_1 körre vonatkozó hatványa $AE \cdot EB = FE \cdot EG$ állandó, ezért a G pont helyzete nem függ az A, B pontpár megválasztásától.



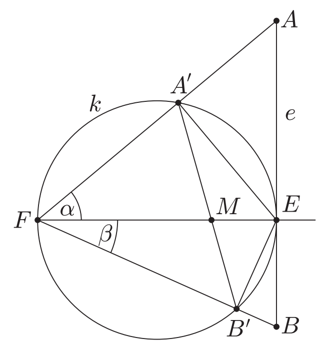
Tekintsük most azt az inverziót, amelynek alapköre az F középpontú, EF sugarú kör. Az e egyenes inverze a k kör, az A és B pontok inverze az A', illetve a B' pont. A k_1 kör inverze az $A'B'$ egyenes; ezen belül is a G-t tartalmazó körív képe az $A'B'$ szakasz. Az $A'B'$ szakasz tehát mindig átmegy a G pont inverzén, G'-n, mely, mint azt láttuk, független az A és B pontok választásától. □

Megjegyzések. 1. A fenti megoldás az inverzió tulajdonságaira épít, amely nem feltétlenül tananyag a középiskolában (lásd hátsó belső borítóoldalt). Ugyancsak inverziót használ megoldásában *Balogh László* és *Maga Péter.*

2. A fenti megoldásból könnyen látható, hogy ha $EF = 1$, akkor

$$FG' = \frac{1}{FG} = \frac{1}{1+EG} = \frac{1}{1+AE\cdot EB}.$$

A továbbiakban megadunk két, szokásosabb megoldást is.



II. megoldás. Legyen most EF és $A'B'$ metszéspontja M. Megmutatjuk, hogy M minden A, B pár esetén ugyanaz a pont; másképpen, az FM hossza állandó. Az FM hosszát az $FA'B'$ háromszög és $FA'EB'$ négyszög területének arányával fogjuk kifejezni:

$$\frac{FM}{EF} = \frac{t_{FA'B'}}{t_{FA'EB'}}.$$

Válasszuk az EF szakasz hosszát egységnek, legyen $AFE\sphericalangle = \alpha$ és $BFE\sphericalangle = \beta$. Az érintő tulajdonság és a Thalész-tétel szerint az FEA, FEB, illetve $FA'E$ és $FB'E$ háromszögek derékszögűek, így $AE = \tan\alpha$, $BE = \tan\beta$, $FA' = \cos\alpha$, $FB' = \cos\beta$, $A'E = \sin\alpha$ és $B'E = \sin\beta$. A keresett területek tehát:

$$t_{FA'B'} = \frac{1}{2}FA'\cdot FB'\sin(\alpha+\beta) = \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)}{2}$$

$$t_{FA'EB'} = t_{FA'E} + t_{FEB'} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta}{2} = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{4} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{2}.$$

Végül

$$FM = \frac{FM}{EF} = \frac{t_{FA'B'}}{t_{FA'EB'}} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{1}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{1+EA\cdot EB}$$

Az FM szakasz hossza tehát állandó. $\square$

III. megoldásvázlat (Kis Gergely megoldása). Válasszuk k középpontját az origónak, sugarát egységnyinek, legyenek továbbá az A és B pontok koordinátái rendre $(1; a)$, ill. $(1; b)$. Az AF és BF egyenesek, ill. a k kör egyenletei rendre

$$\frac{ax}{2} + \frac{a}{2} = y$$

$$\frac{bx}{2} + \frac{b}{2} = y$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

A megfelelő egyenletpárok megoldásából a metszéspontokra

$$A' = \left(\frac{8}{a^2+4} - 1; \frac{4a}{a^2+4}\right) \quad \text{és} \quad B' = \left(\frac{8}{b^2+4} - 1; \frac{4b}{b^2+4}\right)$$

adódik. Az $A'B'$ egyenes egyenlete innen

$$\frac{4+ab}{2(a+b)}\left(x + 1 - \frac{8}{a^2+4}\right) + \frac{4a}{a^2+4} = y.$$

Az $A'B'$ egyenes x tengellyel való metszéspontjának x koordinátája a fenti egyenletből $y = 0$ helyettesítéssel

$$x_0 = \frac{4+ab}{4-ab}.$$

Ez a mennyiség állandó, hiszen ab állandó. Ez azt jelenti, hogy az $A'B'$ egyenesek mindegyike átmegy az $(x_0; 0)$ ponton. $\square$