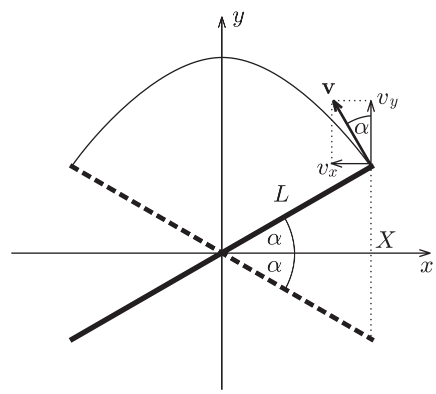
Megoldás. *a*) Tegyük fel, hogy a golyó sebessége az ütközés előtt $\mathbf{v}_1$, az ütközés után pedig $\mathbf{v}_2$. A golyó akkor repül ugyanazon a pályán vissza, mint amelyen érkezett, ha $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$. Emellett annak is teljesülnie kell, hogy a golyó a rúdra merőlegesen érkezik és verődik vissza onnan.

Legyen $v = |\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2|$, a periódusidőt pedig jelölje T. Két ütközés között a rúd elfordulása

$$\varphi = \frac{T}{2}\omega = \pm\frac{\pi}{3} = \pm 60°,$$

s a szimmetria miatt az *ábrán* látható szög: $\alpha = 30°$.



A golyó sebességének komponensei az ütközés után:

$$v_y = v \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}v, \qquad v_x = v \cdot \sin 30° = \frac{1}{2}v.$$

A golyó a periódusidő $\frac{1}{4}$ részében emelkedik, ezalatt a függőleges irányú sebessége nullára csökken, tehát

$$v_y - g\frac{T}{4} = 0,$$

ahonnan

$$v = \frac{gT}{2\sqrt{3}}.$$

A vízszintes sebességkomponens, ami két ütközés között állandó, és a pálya legmagasabb pontján a golyó teljes sebességének nagyságával egyezik meg:

$$v_x = \frac{gT}{4\sqrt{3}} = 1{,}42\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Legyen a rúd hossza $2L$, az egyik ütközési pont vízszintes koordinátája pedig X. Ekkor egyrészt $X = \frac{T}{4}v_x$, másrészt $\frac{X}{L} = \cos 30°$, ahonnan

$$L = \frac{X}{\cos 30°} = \frac{2X}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{T}{4} \cdot \frac{gT}{4\sqrt{3}} = \frac{gT^2}{24} \approx 0{,}41\ \text{m},$$

a rúd hossza tehát $2L \approx 0{,}82$ m.

c) A forgástengely nem fejt ki forgatónyomatékot a rúdra (a nehézségi erő hatása pedig az ütközés igen rövid ideje alatt elhanyagolható), így a teljes rendszer (rúd + golyó) perdülete (impulzusnyomatéka) ütközés előtt és után ugyanakkora:

$$-mvL + \frac{1}{12}M \cdot (2L)^2 \cdot \omega = mvL - \frac{1}{12}M \cdot (2L)^2 \cdot \omega,$$

ahonnan

$$\frac{m}{M} = \frac{L\omega}{3v} = \frac{\sqrt{3}\pi}{54} \approx 0{,}1.$$