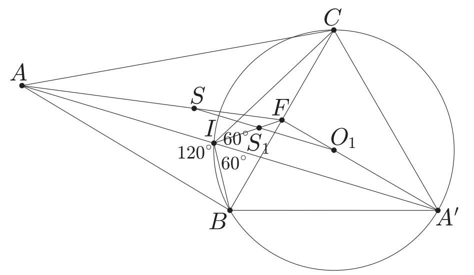
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy mindhárom Euler-egyenes átmegy az ABC háromszög súlypontján. Elég ezt a BCI háromszög Euler-egyenesére igazolni, mivel egyik csúcsnak sincs kitüntetett szerepe.

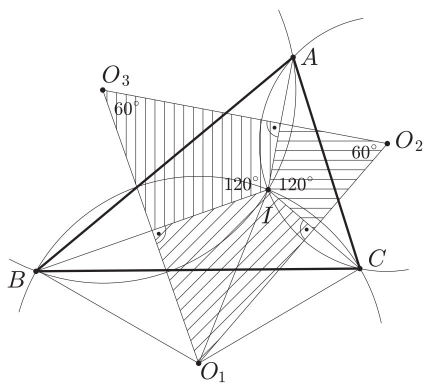


1. ábra

Rajzoljunk a BC oldalra kifelé egy szabályos háromszöget, ennek harmadik csúcsa legyen A', középpontja O_1. Az $IBA'C$ négyszög húrnégyszög, mert $BA'C\sphericalangle + CIB\sphericalangle = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$. Mivel $A'B = A'C$, az $A'I$ szakasz felezi a CIB szöget. Ebből következik, hogy A, I és A' egy egyenesen van (*1. ábra*).

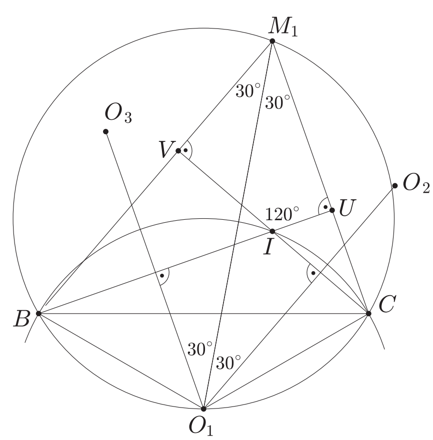
Legyen a BC szakasz felezőponta F, az ABC háromszög súlypontja S, a BCI háromszög súlypontja S_1. Mivel S, S_1 és O_1 nem más, mint az AF, IF, illetve $A'F$ szakaszok F-hez közelebbi harmadolópontja, az S, S_1 és O_1 pontok is egy egyenesen vannak. Tehát, a BCI háromszög Euler egyenese, O_1S_1 átmegy az S ponton.

II. megoldás. Legyen a BCI, CAI, ABI háromszögek körülírt körének középpontja rendre O_1, O_2, O_3, magasságpontjaik M_1, M_2, illetve M_3. Az O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 egyenesek éppen a CI, AI, illetve BI szakaszok felező merőlegesei, és a bevonalkázott négyszögek szögeinek összeszámolásából kapjuk, hogy az $O_1O_2O_3$ háromszög mindegyik szöge 60°, az $O_1O_2O_3$ háromszög szabályos (*2. ábra*).



2. ábra

Megmutatjuk, hogy az ABI, BCI és CAI háromszögek Euler-egyenesei rendre átmennek az $O_1O_2O_3$ háromszög középpontján. Elég ezt az egyik háromszögre igazolni; vizsgáljuk tehát a BCI háromszöget. Mivel $BO_1 IO_1 = CO_1$, az O_1O_2 és O_1O_3 egyenesek szögfelezők a IO_1C és BO_1I szögekben, azért $BO_1C\sphericalangle = 2O_3O_1O_2\sphericalangle = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ (*3. ábra*).



3. ábra

Jelöljük a BI és CM_1 egyenesek metszéspontját U-val, CI és BM_1 metszéspontját V-vel. Az M_1VIU négyszög szögeinek összeszámolásából $CM_1B\sphericalangle = 60°$. Az M_1BO_1C négyszög húrnégyszög, mert $CM_1B\sphericalangle + BO_1C\sphericalangle = 60° + 120° = 180°$. Mivel pedig $BO_1 = O_1C$, az is igaz, hogy $CM_1O_1\sphericalangle = O_1M_1B\sphericalangle = 30°$.

Végül, az $M_1O_1O_2$ és O_1M_1B szögek, valamint az $O_3O_1M_1$ és CM_1O_1 szögek váltószögek, ezért $M_1O_1O_2\sphericalangle = O_3O_1M_1\sphericalangle = 30°$. A BCI háromszög Euler-egyenese, O_1M_1 tehát nem más, mint az $O_3O_1O_2$ szög felezője, átmegy tehát az $O_1O_2O_3$ háromszög középpontján.