Megoldás. A feladatunkban keresett szám nem lehet 4-jegyű vagy annál kisebb, mert egy ilyen számból a számjegyeinek felcserélgetésével legfeljebb 24 különböző számhoz juthatunk, amelyek mindegyike kisebb 10 000-nél. Így e számok összege kisebb 240 000-nél. Vizsgáljuk tehát az ötjegyű számokat.

Ha a keresett számban valamelyik számjegy legalább 3-szor fordul elő, akkor a számjegyek permutációival nyerhető számok száma legfeljebb 20 és ezek mindegyike kisebb 100 000-nél. Így e számok összege kisebb 2 000 000-nál. Tehát ez sem lehetséges.

Az sem fordulhat elő, hogy két számjegy is pontosan 2-szer szerepeljen, mert egy ilyen számból kiindulva 30 különböző számot kapunk, melyek összege kisebb $30 \cdot 100\,000 = 3\,000\,000$-nál.

Tehát ha van olyan 5-jegyű szám, ami megfelel a feltételeknek, akkor vagy minden jegye különböző, vagy pontosan két számjegye egyezik meg.

Nézzük először azt az esetet, amelyben minden számjegy különböző. A szám $\overline{abcde}$ alakú (ahol a, b, c, d és e csupa különböző számjegyet jelöl). Ekkor a számjegyek permutálásával kapott számokban minden egyes számjegy minden helyiértéken 24-szer fordul elő. Így a kapott számok összege:

$$24 \cdot 11\,111 \cdot a + 24 \cdot 11\,111 \cdot b + 24 \cdot 11\,111 \cdot c + 24 \cdot 11\,111 \cdot d + 24 \cdot 11\,111 \cdot e =$$

$$= 24 \cdot 11\,111 \cdot (a + b + c + d + e) = 4\,933\,284,$$

ahonnan $2 \cdot (a + b + c + d + e) = 37$ következik. Ez nyilván nem lehetséges, hiszen a bal oldalon páros szám áll, a jobb oldalon pedig páratlan.

Végül nézzük, van-e olyan ötjegyű szám, amelynek pontosan két jegye egyezik meg és megfelel a feltételeknek. Az ilyen szám jegyeiből készített permutációk között van pl. $\overline{aabcd}$ alakú, ahol a, b, c és d különböző számjegyeket jelölnek. Ha az egyik a számjegyet rögzítjük valamelyik helyiértéken, akkor a többi számjegy minden lehetséges permutálásával 24 számot kapunk, azaz az a számjegy minden helyiértéken 24-szer fordul elő. Ha pedig bármelyik másik számjegyet rögzítjük valamely helyiértéken, akkor a többi jegynek 12 különböző permutációja létezik, vagyis minden a-tól különböző jegy 12-szer fordul elő minden egyes helyiértéken.

Így az $\overline{aabcd}$ alakú szám számjegyeinek permutációival nyerhető számok összege: $24 \cdot 11\,111 \cdot a + 12 \cdot 11\,111 \cdot b + 12 \cdot 11\,111 \cdot c + 12 \cdot 11\,111 \cdot d = 4\,933\,284$. Vagyis $2a + b + c + d = 37$. Akkor kaphatjuk meg az e feltételnek megfelelő legkisebb ötjegyű számot, ha az első helyiértékre a lehető legkisebb számjegyet választjuk. Ez pedig úgy lehetséges, ha a többi helyiértékre a lehető legnagyobbakat; eszerint a lehető legnagyobbak: $2 \cdot 9 + 8 + 7 = 33$, így az első helyiértéken 4-esnek kell állnia.

Található tehát az ötjegyű számok között olyan, amely kielégíti a feltételeket (a kisebb számok között pedig nem), így a legkisebb ilyen ötjegyű szám egyben a keresett legkisebb szám: 47 899.