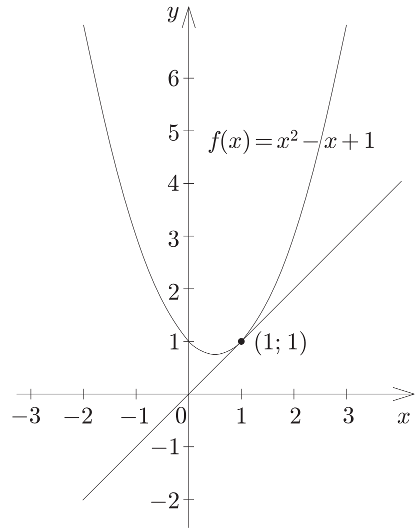
Megoldás. A sorozat az $x_{n+1} = f(x_n)$ rekurzióval van megadva, ahol $f(x) = x^2 - x + 1$. Az f függvény grafikonja az *ábrán* látható, megrajzoltuk az $y = x$ egyenletű egyenest is, amely a görbét az $(1;1)$ pontban érinti. A grafikonról látható, hogy $f(x) \geq \dfrac{3}{4}$, tehát ha $x_1 \neq 0$, akkor az $\dfrac{1}{x_i}$ sorozat minden tagja értelmes.



Ha $0 < x < 1$, akkor $0 < x < f(x) < 1$, tehát ha x_1, a sorozat első tagja 0 és 1 közé esik, mint a feladat *a*) részében, akkor az $\dfrac{1}{x_i}$ sorozat minden tagja nagyobb 1-nél, a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{x_i}$ végtelen sor tehát divergens.

Az adott rekurziót átrendezve kapjuk, hogy

$$x_{n+1} - 1 = x_n(x_n - 1)$$

és mivel $f(x) = 1$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$ vagy $x = 1$, a fenti egyenlőségben nullától különböző értékek állnak, ha a sorozat első tagja nem 0 vagy 1. Mindkét oldal reciprokát véve:

$$\frac{1}{x_{n+1} - 1} = \frac{1}{x_n(x_n - 1)}.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldal különbségként írható: $\dfrac{1}{x_n(x_n - 1)} = \dfrac{1}{x_n - 1} - \dfrac{1}{x_n}$ és így

$$\frac{1}{x_{n+1} - 1} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_n},$$

amit átrendezve a rendkívül jól kezelhető „teleszkopikus” különbséghez jutunk:

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}.$$

Innen ugyanis a vizsgált sor n-edik részletösszege:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \left(\frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_2 - 1}\right) + \left(\frac{1}{x_2 - 1} - \frac{1}{x_3 - 1}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}\right) = \frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}.$$

Ha $x > 1$, akkor nyilván $1 < x < f(x)$, tehát az x_n sorozat szigorúan monoton növő. Az $x_{i+1} - x_i = (x_i - 1)^2$ egyenlőségeket összeadva:

$$x_{n+1} - x_1 = (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_2 - x_1) =$$

$$= (x_n - 1)^2 + (x_{n-1} - 1)^2 + \cdots + (x_1 - 1)^2 > n(x_1 - 1)^2,$$

tehát az x_n sorozat végtelenhez tart és így az $\dfrac{1}{x_{n+1} - 1}$ sorozat határértéke nulla.

Az S_n sorozat határértéke tehát $x_1 > 1$ esetén $\frac{1}{x_1 - 1}$, vagyis ha $x_1 = 2$, akkor a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i}$ végtelen sor összege 1.

Megjegyzések. 1. Ha $x_1 < 0$, akkor a sorozat második tagja 1-nél nagyobb és így a fentiek szerint ebben az esetben is $\frac{1}{x_1 - 1}$ a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i}$ végtelen sor összege.

2. Könnyen igazolható, hogy ha x_1 nem 0 vagy 1, akkor $(x_1 - 1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = 1$. A feladat kérdéseire ennek az azonosságnak a felhasználásával is gyors válasz adható.

3. Abban az esetben, ha $x_1 = 2$, az x_n sorozatnak érdekes tulajdonságai vannak. Először is könnyen igazolható, hogy ebben az esetben az $x_{n+1} = 1 + x_1 x_2 \cdots x_n$ rekurzió számolja ki a sorozat elemeit: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$, $x_4 = 43, \ldots$, másrészt erre a sorozatra teljesül a következő állítás: ha n darab pozitív egész szám reciprokának összege kisebb 1-nél, akkor ez az összeg legfeljebb $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$. Ha belegondol az ember, már az sem nyilvánvaló, hogy az 1-nél kisebb értékű n-tagú reciprokösszegek között egyáltalán létezik legnagyobb…