Megoldás. Jelölje n a keresett $g(x)$ polinom fokszámát. Vizsgáljuk meg először, van-e olyan legfeljebb elsőfokú $g(x)$ polinom, amelyre $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$. Legyen $g(x) = bx + c$. Ekkor

$$f\big(g(x)\big) = abx + ac + 1 \quad \text{és} \quad g\big(f(x)\big) = bax + b + c.$$

Az elsőfokú tagok egyenlők, így ez a két polinom pontosan akkor azonos, ha $ac + 1 = b + c$. Ha $a = 1$, akkor innen $b = 1$, c pedig tetszőleges valós szám, ha pedig $a \neq 1$, akkor $b \neq 0$ tetszőleges és $c = \dfrac{1-b}{1-a}$. Vegyük észre, hogy így a $b = 0$ esetben is megoldást kapunk, ekkor a $g(x)$ konstans és értéke $c = \dfrac{1}{1-a}$.

A továbbiakban legyen $g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ legalább másodfokú polinom. Ekkor

$$g\big(f(x)\big) = b_n(ax+1)^n + b_{n-1}(ax+1)^{n-1} + \ldots + b_1(ax+1) + b_0.$$

Rendezzük ezt a polinomot az x csökkenő hatványai szerint és a binomiális tétel felhasználásával írjuk föl a két legmagasabb fokú tagját:

$$g\big(f(x)\big) = b_n a^n x^n + (nb_n a^{n-1} + b_{n-1}a^{n-1})x^{n-1} + \ldots.$$

Az $f\big(g(x)\big)$ polinom két legmagasabb fokú tagja $b_n a x^n$ és $b_{n-1} a x^{n-1}$.

Ha $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$, akkor szükséges, hogy

$$b_n \cdot a^n = b_n \cdot a, \tag{1}$$

illetve

$$n \cdot b_n \cdot a^{n-1} + b_{n-1} \cdot a^{n-1} = b_{n-1} \cdot a. \tag{2}$$

Az első feltételből $ab_n \neq 0$ és $n \geq 2$ figyelembevételével kapjuk, hogy $a^{n-1} = 1$. Ha n páros, akkor innen $a = 1$, ha pedig páratlan, akkor $a = \pm 1$ adódik.

Ha $a = 1$, akkor a (2) feltételből $n \cdot b_n = 0$, ami nem lehetséges. Nem létezik tehát olyan legalább másodfokú $g(x)$ polinom, amely az $f(x) = x + 1$ polinommal fölcserélhető.

Meg kell még vizsgálnunk az $a = -1$ lehetőséget, amikor n páratlan. Az $f\big(g(x)\big) = -g(x) + 1$, $g\big(f(x)\big) = g(-x+1)$ polinomok pontosan akkor azonosak, ha

$$g(x) + g(1-x) = 1. \tag{1}$$

Geometriailag ez azt jelenti, hogy a $g(x)$ polinom grafikonja szimmetrikus a $(0{,}5; 0{,}5)$ pontra, a $g(x)$ polinom 0,5-re szimmetrikus helyeken fölvett értékei, $g(0{,}5 - x)$ és $g(0{,}5 + x)$ a 0,5-re szimmetrikusan helyezkednek el, összegük 1:

$$g(0{,}5 - x) + g(0{,}5 + x) = 1. \tag{2}$$

(1) és (2) nyilván ekvivalensek, az $x \leftarrow (0{,}5 - x)$ helyettesítéssel kaphatók egymásból. (2) pedig úgy is fogalmazható, hogy ha a $g(x)$ grafikonját a $(-0{,}5; -0{,}5)$ vektorral eltoljuk, akkor a kapott $h(x) = g(0{,}5 + x) - 0{,}5$ polinom grafikonja az origóra szimmetrikus, $h(x) + h(-x) = 0$, a $h(x)$ polinom páratlan.

Ebben az összegben a $h(x)$ páratlan fokú tagjai kiesnek, a páros fokú tagok pedig megkétszereződnek. Ha tehát ez az összeg azonosan nulla, azaz minden együtthatója nulla, akkor a $h(x)$-ben egyáltalán nincsen páros fokú tag: egy polinomfüggvény pontosan akkor páratlan, ha minden tagjának a foka páratlan.

Mivel $g(x) = h(x - 0{,}5) + 0{,}5$, $g(x)$ és $f(x) = -x + 1$ pontosan akkor cserélhető föl, ha

$$g(x) = 0{,}5 + \sum_{k \text{ páratlan}} b_k (x - 0,5)^k,$$

ahol a b_k együtthatók tetszőleges valós számok.

Eredményeinket összefoglalva:

– ha $a = 1$, akkor $g(x) = x + c$,

– ha $a \neq 1$, akkor $g(x) = bx + \dfrac{1-b}{1-a}$, ahol b tetszőleges valós szám,

– ha $a = -1$, akkor $g(x) = 0{,}5 + \displaystyle\sum_{k \text{ páratlan}} b_k (x - 0,5)^k$.