Előzetes megjegyzés. Ha x_1, x_2, x_3 jelöli az

$$x^3-3x+1=0 \tag{1}$$

egyenlet gyökeit, akkor a Viète-formulák szerint

$$x_1+x_2+x_3=0, \quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-3 \quad \text{és} \quad x_1x_2x_3=-1.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy a keresett a, b, c számokra fenn kell állnia a

$$-a=x_1^5+x_2^5+x_3^5, \qquad b=x_1^5x_2^5+x_2^5x_3^5+x_3^5x_1^5, \qquad -c=x_1^5x_2^5x_3^5$$

összefüggéseknek.

Elvben világos a teendőnk: a három egyenlet jobb oldalán az x_1, x_2, x_3 változók szimmetrikus polinomjai állnak, ezek pedig a szimmetrikus polinomok alaptétele szerint kifejezhetők a változók elemi szimmetrikus polinomjaival, tehát (1) együtthatóival. Bár c értéke nyomban adódik, a és b meghatározása meglehetősen hosszadalmas számolásnak ígérkezik. A megoldók többsége ezt sikeresen elvégezte. Ehhez nem is kell ismerni a megoldás hátterében lévő tételt. Az alábbiakban két gyorsabb megoldást mutatunk, az egyik a fenti hatványösszegeket határozza meg célratörőbben és igen áttekinthető módon, a másik pedig közvetlenül a keresett polinomot írja fel.

I. megoldás. A gyökök ötödik hatványösszegének gyorsabb kiszámolásához a polinomok körében elvégezhető maradékos osztási eljárásnak egy nyilvánvaló, de rendkívül hasznos következményét használjuk fel.

Ha α gyöke a $g(x)$ polinomnak és az $f(x)$ polinomot a $g(x)$-szel maradékosan elosztva a maradék $r(x)$, akkor $f(\alpha)=r(\alpha)$, tehát az osztandó és a maradék azonos értékeket vesznek föl az osztó gyökein.

Az állítás nyomban adódik, ha az $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$ egyenlőségben a változó helyére α-t helyettesítünk, hiszen $g(\alpha)$ a feltétel szerint nulla. Eredményünk másképpen azt jelenti, hogy az α minden $f(\alpha)$ polinomja egy g-nél alacsonyabb fokszámú polinom, a g-vel való osztási maradék helyettesítési értékeként számolható.

Legyen tehát $g(x)=x^3-3x+1$. Ekkor $g(x)$ gyökeinek ötödik hatványát kell kiszámolnunk, az $f(x)=x^5$ polinom helyettesítési értékét az x_1, x_2, x_3 helyeken, pontosabban ezek összegét. Osszuk el maradékosan az $f(x)$ polinomot a $g(x)$-szel:

$$x^5=(x^3-3x+1)(x^2+3)-x^2+9x-3,$$

az $r(x)$ maradék $-x^2+9x-3$. A fentiek szerint ekkor $x_i^5=-x_i^2+9x_i-3$. Innen pedig $x_1^5+x_2^5+x_3^5=-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+9(x_1+x_2+x_3)-3\cdot 3$, a tényleges feladat tehát a gyökök négyzetösszegének a meghatározása, amely az ismert módon

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{0})^2-2(\underbrace{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}_{-3}).$$

Minden szereplő kifejezés értékét ismerjük, így

$$-a=x_1^5+x_2^5+x_3^5=-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+9(x_1+x_2+x_3)-3\cdot 3=-6-9=-15.$$

b kiszámolásához gondoljuk meg, milyen „könnyen” ment a gyökök ötödik hatványösszegének a meghatározása. Ezért aztán ahelyett, hogy általában bajlódnánk az ötödik hatványok kéttényezős szorzatainak az összegével, jobb vásárnak tűnik, ha elkészítünk egy olyan $g(x)$ harmadfokú polinomot, amelynek a gyökei éppen ezek a kéttényezős szorzatok, x_1x_2, x_2x_3, illetve x_3x_1. Az így kapott polinom gyökeinek ötödik hatványösszegét azután már gyorsan számolhatjuk a fenti módszerrel, a maradékos osztás után már „csak” ezeknek a kéttényezős szorzatoknak a négyzetösszegére van szükségünk.

Megint a Viète-formulákat felhasználva $g(x)=x^3-b_1x^2+b_2x-b_3$, ahol

$$b_1=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-3,$$

$$b_2=x_1x_2^2x_3+x_2x_3^2x_1+x_3x_1^2x_2=x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=0, \quad \text{végül}$$

$$b_3=x_1x_2x_2x_3x_3x_1=(x_1x_2x_3)^2=1,$$

tehát most $g(x)=x^3+3x^2-1$. Elvégezve a maradékos osztást

$$x^5=(x^3+3x^2-1)(x^2-3x+9)-26x^2-3x+9.$$

A fenti eljárást szó szerint megismételve

$$x_1^5x_2^5+x_2^5x_3^5+x_3^5x_1^5=-26(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2)-3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+3\cdot 9.$$

Mivel $x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2=b_1^2-2b_2=9$, az eredmény nyomban adódik:

$$b=x_1^5x_2^5+x_2^5x_3^5+x_3^5x_1^5=-26\cdot 9+9+3\cdot 9=-198.$$

A keresett polinom tehát $x^3+15x^2-198x+1$.

Megjegyzés. A megoldás módszerével általánosan is megoldható a feladat: ha x_1, x_2, x_3 a $g_1(x)=x^3-a_1x^2+a_2x-a_3$ polinom gyökei, azaz

$$a_1=x_1+x_2+x_3,\quad a_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1,\quad a_3=x_1x_2x_3,$$

akkor a $q_1=x_1^5+x_2^5+x_3^5$, $q_2=x_1^5x_2^5+x_2^5x_3^5+x_3^5x_1^5$, $q_3=x_1^5x_2^5x_3^5$ mennyiségek a következőképpen számolhatók:

q_3 értéke közvetlenül adódik, $q_3=(x_1x_2x_3)^5=a_3^5$.

q_1 kiszámításához az $f(x)=x^5$ polinomot kell maradékosan elosztani a $g_1(x)=x^3-a_1x^2+a_2x-a_3$ polinommal. Ezt elvégezve kapjuk, hogy a maradék

$$r(x)=\big(a_1^3-2a_2a_1+a_3\big)x^2+\big(a_2^2-a_1^2a_2+a_1a_3\big)x+\big(a_1^2-a_2\big)a_3.$$

Innen pedig

$$q_1=r(x_1)+r(x_2)+r(x_3)=\big(a_1^3-2a_2a_1+a_3\big)\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2\big)+$$

$$+\big(a_2^2-a_1^2a_2+a_1a_3\big)(x_1+x_2+x_3)+3\cdot\big(a_1^2-a_2\big)a_3.$$

Felhasználva, hogy a gyökök négyzetösszege $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a_1^2-2a_2$, megvan az eredmény:

$$q_1=\big(a_1^3-2a_2a_1+a_3\big)(a_1^2-2a_2)+\big(a_2^2-a_1^2a_2+a_1a_3\big)a_1+3\cdot\big(a_1^2-a_2\big)a_3,$$

ami „puszta kézzel” elég barátságtalan számolás volna. Áttekinthetőbb alakot kapunk egyébként, ha az a_1 hatványai szerint rendezve is felírjuk az eredményt:

(2) $$q_1=a_1^5-5a_2a_1^3+5a_3a_1^2+5a_2^2a_1-5a_2a_3.$$

q_2 kiszámításához írjuk fel azt a $g_2(x)=x^3-b_1x^2+b_2x-b_3$ polinomot, amelynek a gyökei éppen a $g_1(x)$ gyökeiből készített kéttényezős szorzatok, x_1x_2, x_2x_3, illetve x_3x_1. A megoldásban látottak szerint ekkor

$$b_1=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=a_2,$$

$$b_2=x_1x_2^2x_3+x_2x_3^2x_1+x_3x_1^2x_2=x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=a_1a_3,\quad \text{végül}$$

$$b_3=x_1x_2x_2x_3x_3x_1=(x_1x_2x_3)^2=a_3^2.$$

Ezek után (2) alapján $q_2=b_1^5-5b_2b_1^3+5b_3b_1^2+5b_2^2b_1-5b_2b_3$, ahonnan behelyettesítés után

$$q_2=a_2^5-5a_1a_3a_2^3+5a_3^2a_2^2+5a_1^2a_3^2a_2-5a_1a_3^3.$$

II. megoldás. Ha az x^3+px+q polinom gyökei x_1, x_2 és x_3, akkor egy szerencsés észrevétellel közvetlenül felírhatunk olyan egyenletet, amelynek éppen x_1^5, x_2^5 és x_3^5 a gyökei. Ha ugyanis az

$$x^{\frac{3}{5}}+px^{\frac{1}{5}}+q$$

kifejezésben x helyére x_i^5-t helyettesítünk, akkor $x_i^3+px_i+q$ adódik, ami a feltétel szerint nulla. Megfordítva, ha y megoldása az $x^{\frac{3}{5}}+px^{\frac{1}{5}}+q=0$ egyenletnek, akkor ötödik gyöke polinomunknak lesz gyöke. A talált alak viszont sajnos nem polinom, de ezen lehet segíteni.

Használjuk fel az

$$(a+b)^5=a^5+b^5+5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$$

azonosságot és emeljük ötödik hatványra az átrendezett

(3) $$x_i^{\frac{3}{5}}+px_i^{\frac{1}{5}}=-q$$

egyenlőségeket ($i=1,2,3$).

$$-q^5=x_i^3+p^5x_i+5px_i^{\frac{4}{5}}(-q)\Big(x_i^{\frac{6}{5}}+px_i^{\frac{4}{5}}+p^2x_i^{\frac{2}{5}}\Big).$$

A számolás során az $x_i^{\frac{3}{5}}+px_i^{\frac{1}{5}}$ összeget a vele (3) szerint egyenlő $(-q)$-val helyettesítettük. Ha most a zárójelben álló összegből kiemelünk $x_i^{\frac{1}{5}}$-t, akkor minden a helyére zökken, ugyanis (3) újabb fölhasználásával a megmaradt törtkitevők is eltüntethetők:

$$-q^5=x_i^3+p^5x_i-5pqx_i\bigg(x_i+p\Big[\underbrace{x_i^{\frac{3}{5}}+px_i^{\frac{1}{5}}}_{-q}\Big]\bigg),\quad \text{tehát}$$

$$-q^5=x_i^3+p^5x_i-5pqx_i(x_i-pq).$$

A kapott egyenlőségek így azt jelentik, hogy x_i^5 gyöke az

$$x^3 - 5pqx^2 + (p^5 + 5p^2q^2)x + q^5 = 0$$

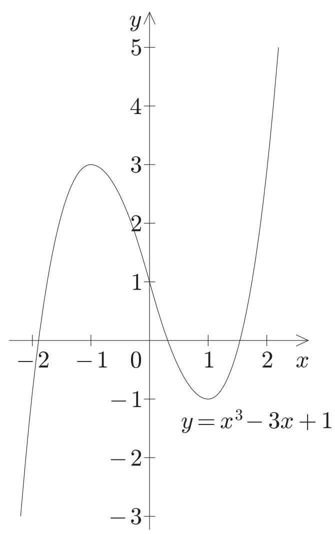
egyenletnek. A feladatban $p = -3$ és $q = 1$, a keresett polinom tehát

$$x^3 + 15x^2 - 198x + 1,$$

$a = 15$, $b = -198$, $c = 1$.

Megjegyzések. 1. Az olvasó általában is megkísérelheti a második megoldás módszerével közvetlenül felírni a megfelelő harmadfokú polinomot, amelynek együtthatói az I. megoldás általános formulái.

2. A hosszúra nyúlt megoldás végén magyarázattal szolgálhatunk a feladat némileg sajátos szövegezésére. Ha közelítő értékeket is elfogadhatónak tekintünk, akkor messze a legegyszerűbb út az eredeti egyenlet, $x^3 - 3x + 1 = 0$ numerikus megoldása, hiszen a szóban forgó hatványösszegek azonnal számolhatók a gyökökből. A feladat nem kérdezte a gyökök jellegét, közöttük elvben komplex számok is lehetnek, ami persze nem befolyásolja a megoldást. Megnyugtatásul fölvázolhatjuk a függvény grafikonját (*ábra*): leolvasható, hogy az egyenletnek három valós gyöke van. Mivel egyikük sem racionális, csak a közelítő megoldás marad. A gyökök két tizedes pontossággal: $x_1 \approx -1{,}88$; $x_2 \approx 0{,}35$; $x_3 \approx 1{,}53$. Ha ezekkel a közelítő értékekkel végezzük el a számolást, akkor két tizedesre kerekítve $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 \approx -15{,}1$, illetve $(x_1^5x_2^5) + (x_2^5x_3^5) + (x_3^5x_1^5) \approx -197$. Látható, hogy a második eredménynél a kerekítési hibák már egységnyi eltéréshez vezetnek, a számolás tehát legfeljebb az eredmény tesztelésére jó.



Egy másfajta, önmagában is érdekes megközelítéssel azonban igenis felírható a gyökök „pontos” értéke. Ezt a módszert – a modern algebrai jelölésrendszer kidolgozása mellett – a nevezetes formulák névadója, *François Viète* dolgozta ki, éppen a harmadfokú egyenlet vizsgálata során. (Hozzátartozik az igazsághoz, hogy magukat a formulákat egy másik francia matematikus, *Albert Girard* vezette be a XVII. század első felében, egy jó emberöltővel Viète után.)

A matematikatörténet Viète-nek tulajdonítja az észrevételt, hogy a fenti típusú hiányos harmadfokú egyenletek kísértetiesen emlékeztetnek bizonyos jól ismert trigonometrikus összefüggésekre. Egyes források szerint azonban már az indiai matematikusok is használták ezt a módszert a XIV. században.

Ha a háromszoros szög szinuszára vonatkozó $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ összefüggést 2-vel szorozzuk és átrendezzük, akkor az (1) egyenlethez hasonló szerkezetű alakot kapunk:

$$(2\sin\alpha)^3 - 3\cdot(2\sin\alpha) + 2\sin 3\alpha = 0. \tag{1'}$$

Ez az azonosság úgy is olvasható, hogy valahányszor az α szögre teljesül, hogy (1′) utolsó tagja, $2\sin 3\alpha$ egyenlő az (1) egyenlet konstans tagjával, ami most 1, akkor erre a szögre $2\sin\alpha$ az (1) egyenlet megoldása. Ez volt Viète észrevétele. Ezek után az (1) egyenlet gyökei a

$$2\sin 3\alpha = 1 \tag{4}$$

egyenlet megoldásával kaphatók. A (4) egyenlet megoldásai nyomban adódnak:

$$\alpha = 10^\circ + k\cdot 120^\circ, \quad \text{illetve} \quad \alpha = 50^\circ + k\cdot 120^\circ.$$

A szinuszfüggvény szimmetriáit figyelembe véve három különböző szinusz-érték és így – természetesen – három különböző megoldás adódik: az (1) egyenlet gyökei tehát $2\sin 10^\circ \approx 0{,}3473$; $2\sin 130^\circ \approx 1{,}5321$, végül $2\sin 250^\circ \approx -1{,}8794$.

Ha tehát a szokásos módon a *„Határozzuk meg az a, b, c számokat úgy, hogy...”* formában tűztük volna ki a feladatot, akkor, amint erre *Csikvári Péter* felhívta a figyelmünket, a fentiek alapján kifogástalan az alábbi válasz:

$$a = -2^5(\sin^5 10° + \sin^5 130° + \sin^5 250°),$$

$$b = 2^{10}(\sin^5 10° \cdot \sin^5 130° + \sin^5 130° \cdot \sin^5 250° + \sin^5 250° \cdot \sin^5 10°),$$

$$c = -2^{15} \cdot \sin^5 10° \cdot \sin^5 130° \cdot \sin^5 250°.$$

A feladat szövegében szereplő érthetetlennek tűnő kitétel a tízes számrendszerbeli alakról éppen erről az útról akarta letéríteni Viète esetleges követőit. Valószínűleg maximális pontszámot kellett volna ajánlanunk, ha valaki így oldja meg a feladatot.