3. feladat. *Atomi erő mikroszkóp*

(*a*) A $z(t) = A\sin(\omega t - \Phi)$ függvényt behelyettesítve a szinuszos gerjesztéssel csillapított kényszerrezgést leíró $m\ddot{z} + b\dot{z} + m\omega_0^2 z = F_0 \sin(\omega t)$ egyenletbe, és $\sin(\omega t - \Phi)$-re, $\cos(\omega t - \Phi)$-re alkalmazva az addíciós azonosságokat, rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$(1)\qquad \overbrace{\Big(bA\omega\sin\Phi + mA(\omega_0^2-\omega^2)\cos\Phi - F_0\Big)}^{0}\sin(\omega t) + \\ + \underbrace{\Big(-mA(\omega_0^2-\omega^2)\sin\Phi + bA\omega\cos\Phi\Big)}_{0}\cos(\omega t) = 0.$$

Ez az egyenlet csak úgy állhat fenn minden t időpillanatban, ha mindkét kapoccsal jelölt kifejezés zérus. Ebből az A amplitúdóra valamint a Φ fázis tangensére a

$$(2)\qquad \mathrm{tg}\,\Phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}, \qquad A = \frac{F_0}{\sqrt{b^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$$

megoldás adódik. Speciálisan az $\omega = \omega_0$ „rezonanciafrekvencián”:

$$(3)\qquad \Phi = \frac{\pi}{2}, \qquad A = \frac{F_0}{b\omega_0}.$$

Megjegyezzük, hogy a *rezonanciafrekvencia* szó itt kicsit félrevezető, ugyanis (2) második összefüggése szerint nem zérus csillapítás mellett ($b > 0$) az $A(\omega)$ amplitúdó a maximumát nem ω_0, hanem $\omega_{\max} = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{2m^2\omega_0^2}}$ értéknél veszi fel. Azonban a feladatban szereplő $\omega_0 \gg \dfrac{b}{m} > 0$ feltevés mellett, azaz kis csillapításnál $\omega_{\max} \approx \omega_0$, ezért a feladat további részében is „rezonanciafrekvencián” kicsit pongyolán a gerjesztés és csillapítás nélkül létrejövő rezgés ω_0 frekvenciáját értjük.

(*b*) A $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$ azonosság felhasználásával a lock-in erősítőben létrejövő szorzat jel a következő alakban írható:

$$(4)\qquad V_i V_R = V_{i0}\sin(\omega_i t - \Phi_i) V_{R0}\sin(\omega t) = \\ = \frac{V_{i0}V_{R0}}{2}\Big(\cos\big[(\omega_i-\omega)t - \Phi_i\big] - \cos\big[(\omega_i+\omega)t - \Phi_i\big]\Big).$$

Általában mindkét koszinusz függvény időátlaga nulla. A szorzat jelnek csak az $\omega_i = \omega$ speciális esetben van egyenfeszültségű komponense, ugyanis ekkor az első koszinusz függvény argumentuma független az időtől. Ekkor a kimenő jel egyenfeszültségű komponense:

$$(5)\qquad \frac{V_{i0}V_{R0}}{2}\cos\Phi_i.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti számolás rávilágít a lock-in erősítési technika lényegére. Tegyük fel ugyanis, hogy a V_i bemenő jelet nagy, esetleg magánál a V_{i0} jelamplitúdónál is nagyobb véletlen zaj terheli. Hagyományos módon ekkor nem tudnánk kiszűrni a mérendő jelet a háttérzajból. Azonban a lock-in detektor kimenetén a véletlen zaj nulla időátlagú jelet ad, úgy, ahogy $\omega_i \neq \omega$ esetén is zérus a kimeneti jel időátlaga. Pontosabban, a zajt is, mint ahogy minden más jelet, fel lehet bontani különböző frekvenciájú szinuszos jelek összegére (ezt hívják Fourier–analízisnek). A lock-in detektor egy igen erősen szelektív frekvenciaszűrőként működik, a referencia jel ω frekvenciájának egy nagyon szűk környékén átengedi a jelet, míg minden más frekvenciájú Fourier-komponenst elnyom. Így a zaj nagy része nem jelenik meg a kimeneten, míg az ω frekvenciájú jel zavartalanul átjut a lock-in erősítőn.

(*c*) Az (*a*) pont (3) eredménye szerint az ω_0 rezonanciafrekvencián az érzékelő kar kitérése $\pi/2$ fázissal késik a gerjesztéshez képest. Így az $F = c_1 V_R' = c_1 V_{R0}\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ gerjesztés hatására a fotoérzékelő kimenő jele $V_i = c_2 z = c_1 c_2 \dfrac{V_{R0}}{b\omega_0}\sin(\omega t)$ alakú, azaz azonos fázisban van a $V_R = V_{R0}\sin(\omega t)$ referencia jellel. Így az (5) formulában $\Phi_i = 0$, tehát a lock-in erősítő egyenáramú kimenő jele:

$$(6)\qquad \frac{V_{i0}V_{R0}}{2}\cos 0 = c_1 c_2 \frac{V_{R0}^2}{2b\omega_0}.$$

(*d*) A Δm tömegváltozás hatására az új rezonanciafrekvencia

$$(7)\qquad \sqrt{\frac{k}{m}}\left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \omega_0\Big(1 - \frac{\Delta m}{2m}\Big), \quad \text{tehát} \quad \Delta\omega_0 = -\omega_0\frac{\Delta m}{2m}.$$

A rezonanciafrekvencia és a tömegváltozás hatására (2) első egyenletének értelmében a gerjesztés és a kialakult kényszerrezgés közti Φ fázis is megváltozik. Kezdetben (a tömegváltozás előtt) a rendszer $\omega = \omega_0$ rezonanciafrekvencián működött, és a fázistolás értéke $\Phi = \pi/2$ volt. A tömeg megváltozása nem befolyásolja az $\omega = \omega_0$ gerjesztési frekvenciát, azonban a fázis, a tömeg, ill. a rezonanciafrekvencia a $\phi \to \frac{\pi}{2} + \Delta\phi$, $m \to m + \Delta m$, ill. $\omega_0 \to \omega_0 + \Delta\omega_0$ formulának megfelelően eltolódik. Ezeket a helyettesítéseket elvégezve (2) első egyenletében, és $\Delta\Phi$, ill. Δm kicsiny értékei mellett alkalmas közelítést használva

$$\underbrace{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\Phi\right)}_{\approx -1/\Delta\Phi} = b\omega_0 \Big/ \underbrace{\Big([m + \Delta m]\big[(\omega_0 + \Delta\omega_0)^2 - \omega_0^2\big]\Big)}_{\approx -\Delta m \omega_0^2}, \tag{8}$$

adódik, ahonnan a fáziseltolódásból még éppen kimutatható tömegváltozás:

$$\Delta m = \frac{\Delta\Phi\, b}{\omega_0} = \frac{b}{m} \cdot \frac{m^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}} \cdot \Delta\Phi = 10^3 \cdot 10^{-18} \cdot \frac{\pi}{1800}\ \mathrm{kg} = 1{,}7 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{kg}. \tag{9}$$

(*e*) Mivel a minta által kifejtett $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$ erő is lineárisan függ a kar elmozdulásától, csakúgy, mint a rugóerő, a két erő eredője egy új, k' rugóállandójú effektív rugóerőnek tekinthető, és ez határozza meg az új rezonanciafrekvenciát. Pontosabban a h_0 egyensúlyi helyzettől mért $z = h - h_0$ kitérésre a következő mozgásegyenlet írható fel:

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + m\omega_0^2 z = F_0 \sin(\omega t) + c_3 z. \tag{10}$$

(Az új egyensúlyi helyzetben az $f(h_0)$ konstans kiesik az egyenletből.)

Látható, hogy az új effektív rugóállandó $k' = m\omega_0^2 - c_3$, így az új rezonanciafrekvencia:

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}}, \quad \text{és} \quad \Delta\omega_0 = \omega_0' - \omega_0 \approx -\frac{c_3}{2m\omega_0}\,. \tag{11}$$

(*f*) A maximális frekvenciaeltolódás akkor jön létre, amikor a mikroszkóp érzékelő tűje éppen a csapdázott elektron fölött van. Ekkor a minta és a kar közti Coulomb-erő $f(h) = k_e \frac{qQ}{h^2}$. Feltéve, hogy a kar rezgésének amplitúdója jóval kisebb, mint a két töltés d_0 távolsága, az $f(h)$ függvényt linearizálhatjuk az egyensúlyi helyzet körül. A meredekségre a

$$c_3 = \left.\frac{df}{dh}\right|_{h=d_0} = -2k_e \frac{qQ}{d_0^3} \tag{12}$$

érték adódik, ahonnan (11) felhasználásával a frekvenciaeltolódás $\Delta\omega_0 \approx \frac{k_e qQ}{m\omega_0 d_0^3}$. Innen a keresett távolság az adatok behelyettesítésével:

$$d_0 = \sqrt[3]{\frac{k_e qQ}{m\omega_0 \Delta\omega_0}} = 4{,}1 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m} = 41\ \mathrm{nm}. \tag{13}$$

Az 1985-ben G. Binnig, C. F. Quate és Ch. Gerber által felfedezett atomi erő mikroszkóp[1] (*Atomic Force Microscope,* AFM) két tekintetben is a pásztázó alagútmikroszkóp (Scanning Tunneling Microscope, STM) kishúgának tekinthető: egyrészt a két berendezés felfedezői részben azonosak[2]; másrészt, a két berendezés működési elvének is vannak hasonló vonásai. Mindkét eszközben egy nagyon kisméretű, éles hegyű tűt mozgatnak a minta fölött, soronként pásztázva végig a minta felszínét. Mindkét berendezés alkalmas atomi méretű mintázatok detektálására. Az STM-ben a mért jel a tű és a minta között folyó áram ingadozása, míg az AFM-ben a tűre ható mechanikai erő finom változásait érzékelik. Így az atomi erő mikroszkóp lényegében úgy tapogatja le a minta felszínét, mint ahogy a régi lemezjátszók tűje érzékeli a hangjeleket tartalmazó mikrobarázdákat a bakelit hanglemezen.

A fenti feladat az AFM egy fejlettebb változatának elvi működéséhez kapcsolódik; az érzékelő tű nem kerül direkt kontaktusba a minta felszínével, hanem ahhoz nagyon közel gerjesztett rezgőmozgást végez, és a rezgés fázisának a minta hatására bekövetkező eltolódását detektálják.

Az AFM technikának több jelentős előnye is van a néhány évvel korábban felfedezett STM-mel szemben: a mintát nem kell légüres térbe helyezni, vizsgálhatók levegőben, vagy folyadék alatt levő minták is; a mintának nem kell elektromos vezetőnek lennie; a vizsgálat kevésbé roncsoló hatású, így vizsgálhatók lágyabb minták, például biológiai szövetek is.

---

[1] *Phys. Rev. Lett.,* **56**, 930–933 (1986).

[2] A pásztázó alagútmikroszkópot G. Binnig és H. Rohrer fedezte föl 1981-ben; felfedezésükért 1986-ban Nobel-díjat kaptak.