2. feladat. *Felemelkedő ballon*

(a) Felhasználva az ideális gáz állapotegyenletét, n mól hélium gáz térfogata $p+\Delta p$ nyomáson és T hőmérsékleten

$$V=\frac{nRT}{p+\Delta p}\,,$$

míg n' mól levegő térfogata p nyomáson és T hőmérsékleten

$$V=\frac{n'RT}{p}\,.$$

Így a ballon kiszorít $n'=n\dfrac{p}{p+\Delta p}$ mól levegőt, melynek súlya $M_{\mathrm{lev}}n'g$. A kiszorított levegő súlya megegyezik a felhajtóerővel, azaz

$$F_{\mathrm{fel}}=M_{\mathrm{lev}}ng\frac{p}{p+\Delta p}\,.$$

(b) A z magasságkülönbségből származó nyomásváltozás $-\varrho gz$, ha a levegő ϱ sűrűsége állandó. Ha a sűrűség a magasság függvényeként változik, akkor a következő egyenletet használhatjuk:

$$\frac{dp}{dz}=-\varrho g=-\frac{\varrho_0T_0}{p_0}\,\frac{p}{T}\,g,$$

ahol az egyesített gáztörvényt $\dfrac{\varrho T}{p}=$ állandó alakban használtuk. Ha ebbe az egyenletbe behelyettesítjük a feladatban megadott $p(z)=p_0(1-z/z_0)^\eta$ összefüggést, illetve a $T(z)=T_0(1-z/z_0)$ függvényt, akkor a deriválás elvégzése után a keresett η kitevőt így fejezhetjük ki:

$$\eta=\frac{\varrho_0z_0g}{p_0}=\frac{1{,}16\cdot 4{,}9\cdot 10^4\cdot 9{,}8}{1{,}01\cdot 10^5}=5{,}52.$$

A kérdéses kitevő számértéke tehát két értékes jegy pontossággal: 5,5.

(c) Amikor Δp nyomáskülönbség mellett a ballon sugarát r-ről $(r+dr)$-re növeljük, akkor a rugalmas megnyújtáshoz szükséges munka

$$dW=4\pi r^2\Delta p\,dr,$$

míg ugyanekkora r sugár mellett a rugalmas energia növekményét a feladatban megadott $U=4\pi\,r_0^2\kappa RT\left(2\lambda^2+\dfrac{1}{\lambda^4}-3\right)$ energia függvény deriválásával határozhatjuk meg:

$$dW=\left(\frac{dU}{dr}\right)\,dr=4\pi\kappa RT\left(4r-4\frac{r_0^6}{r^5}\right)\,dr.$$

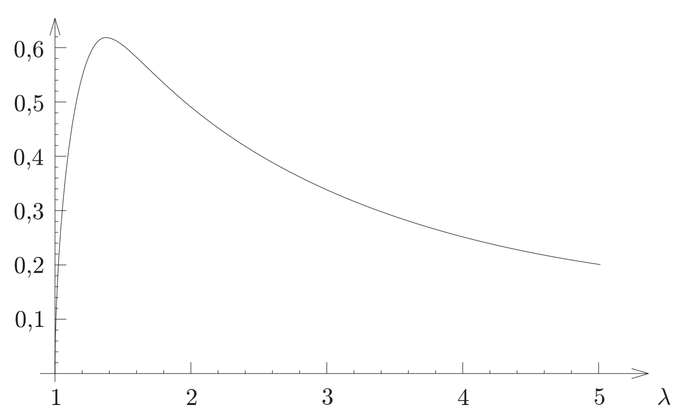
A munkavégzés kétféle kifejezésének egyenlővé tételével kaphatjuk meg a kívánt választ:

$$\Delta p=4\kappa RT\left(\frac{1}{r}-\frac{r_0^6}{r^7}\right)=\frac{4\kappa RT}{r_0}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^7}\right).$$

A nyomáskülönbség grafikon λ (>1) függvényében kezdetben élesen növekszik, $\lambda=7^{1/6}=1{,}38$ értéknél maximumot vesz fel, majd nagy λ értékeknél λ^{-1} szerint csökken. A következő ábrán a dimenziótlan

$$\frac{\Delta p}{\frac{4\kappa RT}{r_0}}=\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^7}\right)$$

kifejezés ábrázolása látható:



(d) Írjuk fel az ideális gáz állapotegyenletét: $p_0 V_0 = n_0 R T_0$, ahol V_0 a feszítetlen falú ballon térfogatát jelenti. Az n mól gázt tartalmazó ballon belső nyomása $V = \lambda^3 V_0$ térfogat mellett $T = T_0$ hőmérsékleten:

$$p_{\text{belső}} = \frac{nRT_0}{V} = \frac{n}{n_0 \lambda^3} p_0.$$

Másrészt a ballon belső nyomását a (c) alkérdésre megadott többletnyomás segítségével is kifejezhetjük $T = T_0$ hőmérsékleten:

$$p_{\text{belső}} = p_0 + \Delta p = p_0 + \frac{4\kappa R T_0}{r_0}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right) = \left[1 + a\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7}\right)\right] p_0.$$

A belső nyomás fenti két kifejezését egyenlővé téve határozhatjuk meg az a „ballonparamétert”:

$$a = \frac{\frac{n}{n_0\lambda^3} - 1}{\lambda^{-1} - \lambda^{-7}}\,.$$

A megadott $n/n_0 = 3{,}6$ és $\lambda = 1{,}5$ numerikus adatokat behelyettesítve, a ballonparaméterre $a = 0{,}11$ adódik.

(e) Az (a) alkérdésben levezetett felhajtóerő egyensúlyt tart az $M_{\text{teljes}} = 1{,}12$ kg tömegre ható nehézségi erővel, ami a következő összefüggésre vezet:

$$\frac{p}{p + \Delta p} = \frac{M_{\text{teljes}}}{M_{\text{lev}} \cdot n}\,.$$

Másrészről, ha a $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \lambda^3 \frac{4}{3}\pi r_0^3 = \lambda^3 V_0$ térfogatú ballon belsejében lévő héliumra újra alkalmazzuk az ideális gáz állapotegyenletét, akkor tetszőleges külső p nyomás és T hőmérséklet esetén a ballonban lévő n mól héliumra felírhatjuk:

$$(p + \Delta p)\lambda^3 = \frac{nRT}{V_0} = p_0\,\frac{T}{T_0}\,\frac{n}{n_0}\,.$$

Ha a fenti két összefüggés mellett felhasználjuk a (c) alkérdésben a nyomáskülönbségre megkapott formulát, akkor meghatározhatjuk a három ismeretlen mennyiséget, vagyis p, Δp és λ értékét mint a T hőmérséklet és egyéb adatok függvényét.

A fenti két összefüggés összevetéséből a felhajtóerő–súly egyensúlyra egy újabb feltételt kapunk:

$$\frac{p}{p_0}\,\frac{T_0}{T}\,\lambda^3 = \frac{M_{\text{teljes}}}{M_{\text{lev}} \cdot n_0}\,.$$

Ezek után használjuk fel a (c) alkérdésben a nyomáskülönbségre megkapott formulát és az ideális gázegyenletből kapott összefüggést:

$$p\lambda^3 + \frac{4\kappa RT}{r_0}\lambda^2(1 - \lambda^{-6}) = p_0\,\frac{T}{T_0}\,\frac{n}{n_0}\,,$$

illetve ezt átrendezve és felhasználva a korábban bevezetett a „ballonparamétert”:

$$\frac{p}{p_0}\,\frac{T_0}{T}\,\lambda^3 = \frac{n}{n_0} - a\lambda^2(1 - \lambda^{-6}).$$

Így az előzőleg a felhajtóerő-súly egyensúlyra kapott feltétellel megegyező bal oldalú összefüggésre jutottunk. A jobb oldalak egyenlővé tételével olyan egyenlethez juthatunk, amely már csak a λ lineáris méretnövekedési arányt tartalmazza:

$$\lambda^2(1 - \lambda^{-6}) = \frac{1}{an_0}\left(n - \frac{M_{\text{teljes}}}{M_{\text{lev}}}\right) = 4,54.$$

Az egyenlet megoldása akkor egyszerű, ha közelítést (belátható, hogy nagyon jó közelítést) használunk:

$$\lambda^2 \approx \frac{4{,}54}{1 - 4{,}54^{-3}} \approx 4{,}54 \quad\longrightarrow\quad \lambda_f \cong 2{,}13.$$

A ballon maximális emelkedési magasságát úgy kaphatjuk meg, ha a felhajtóerő–súly egyensúlyra kapott feltételben $\left(\frac{p}{p_0}\,\frac{T_0}{T}\right)$ helyére beírjuk a nyomás és a hőmérséklet magasságfüggését, amit a (b) alkérdésben ismerhettünk meg:

$$\frac{p}{p_0}\,\frac{T_0}{T}\,\lambda_f^3 = \left(1 - \frac{z_f}{z_0}\right)^{\eta - 1}\lambda_f^3 = \frac{M_{\text{teljes}}}{M_{\text{lev}} \cdot n_0} = 3{,}10.$$

Felhasználva, hogy $\lambda_f = 2{,}13$ és $(\eta - 1) = 4{,}5$, a ballon maximális emelkedési magasságára

$$z_f = (49\text{ km}) \cdot \left(1 - \left[\frac{3{,}10}{2{,}13^3}\right]^{\frac{1}{4{,}5}}\right) = 10{,}9\text{ km}.$$

A ballon tehát mintegy 11 km magasságra emelkedik, és lineáris mérete $\lambda_f = 2{,}1$-szeresére növekszik.