1. feladat. *„Pingpong-ellenállás”*

(a) Az R sugarú, egymástól d ($d \ll R$) távolságra levő kondenzátorlemezek között ható elektrosztatikus erőt két lényegesen különböző módon is kiszámolhatjuk a kondenzátorra kapcsolt V feszültség ismeretében:

i) Az egyik, például az alsó lemezre ható erő megegyezik a lemezen tárolt Q töltésnek és a másik, felső lemez által keltett E' elektromos térerősségnek a szorzatával. A kondenzátoron belüli térerősség $E = \dfrac{V}{d} = 2E'$, hiszen mindkét kondenzátorlemez azonos E' járulékot ad belül a térhez. Az egyes kondenzátorlemezek Q töltése a kondenzátorlemezt körülvevő hengerfelületre felírt Gauss-tételből kapható meg: $Q = 2E'\varepsilon_0 R^2\pi$. Ezek alapján az alsó lemezre ható elektrosztatikus vonzóerő:

(1)
$$F = \varepsilon_0 \frac{V^2 R^2 \pi}{2d^2}\,.$$

ii) A lemezek között ható erőt megkaphatjuk energetikai megfontolások segítségével is! Tegyük föl, hogy a lemezeket a köztük ható F erő ellenében kicsiny Δd távolsággal eltávolítjuk egymástól. Minthogy a kondenzátor állandó V feszültségre van kapcsolva, és $C = \varepsilon_0 \dfrac{R^2\pi}{d}$ kapacitása megváltozik, töltése is megváltozik, mégpedig

(2)
$$\Delta Q = V(C_2 - C_1) = \varepsilon_0 V R^2 \pi \left(\frac{1}{d+\Delta d} - \frac{1}{d}\right) \approx -\varepsilon_0 V R^2 \pi \frac{\Delta d}{d^2}$$

értékkel. (A negatív előjel töltéscsökkenést jelez. A közelítésnél felhasználtuk, hogy $(1+\alpha)^{-1} \approx 1-\alpha$, ha $|\alpha| \ll 1$.)

A kondenzátorlemezek eltávolításakor végzett kicsiny $\Delta W = F\cdot\Delta d$ munka kétféle energiaváltozást fedez. Egyrészt a kondenzátor energiája $\Delta E_{\text{kond}} = \dfrac{1}{2}V\cdot\Delta Q$ értékkel változik meg, hiszen változik a rajta tárolt töltés. Másrészt a telep energiája $\Delta E_{\text{telep}} = -V\cdot\Delta Q$ értékkel változik meg, hiszen az egymáshoz képest V potenciálkülönbségű kapcsok között ΔQ töltés vándorol át. (Ha $\Delta Q > 0$, azaz a telep tölti a kondenzátort, akkor energiája csökken, ez indokolja a negatív előjelet.) Tehát a folyamatra a következő formában írható föl az energiamegmaradás tétele:

(3)
$$\Delta W = F\cdot\Delta d = \Delta E_{\text{kond}} + \Delta E_{\text{telep}} = -\frac{1}{2}V\cdot\Delta Q = \varepsilon_0 V^2 R^2 \pi \frac{\Delta d}{2d^2}\,,$$

ahonnan közvetlenül adódik az előző pontban kapott (1) eredmény.

Felhívjuk a figyelmet arra az érdekes tényre, hogy annak ellenére, hogy a kondenzátorlemezek távolításakor *munkát végeztünk,* a kondenzátor energiája *csökkent,* mégpedig pontosan a végzett munkával megegyező értékkel, $\Delta W = -\Delta E_{\text{kond}}$. Ezzel szemben a telep energiája $\Delta E_{\text{telep}} = 2\Delta W$ értékkel *nőtt,* hiszen a kondenzátor „töltötte” a telepet.

(b) A kondenzátor alsó fegyverzetén fekvő r sugarú kis korong q töltése például a Gauss-tétel segítségével kapható meg. Írjuk föl a tételt egy olyan hengerfelületre, amely körbeveszi a kis korongot: $q = \varepsilon_0 E r^2 \pi = \varepsilon_0 \dfrac{r^2\pi}{d}V$, ahonnan a keresett paraméter:

(4)
$$\chi = \varepsilon_0 \frac{r^2\pi}{d}\,.$$

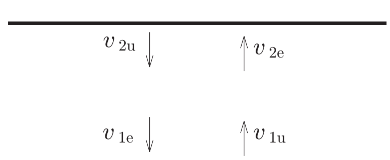
Kicsit szellemesebben, egyszerűbben is megkaphatjuk a keresett töltést, ha észrevesszük, hogy a fegyverzet teljes Q töltésének éppen a kis korong területére eső $\dfrac{r^2}{R^2}$ hányada adja meg q-t.

(c) A kis korong akkor emelkedik föl a fegyverzetről, ha a rá ható qE' elektrosztatikus erő megegyezik, vagy nagyobb, mint a lefelé mutató mg nehézségi erő. Hangsúlyozzuk, hogy az alsó fegyverzeten fekvő korongra ható elektrosztatikus erőt csupán a felső fegyverzet által keltett $E' = \dfrac{E}{2} = \dfrac{V}{2d}$ térből kell kiszámolnunk, hiszen az alsó fegyverzet nem fejt ki (függőleges irányú) elektrosztatikus erőt a kis korongra. Így a V_{k} küszöbfeszültségre az $mg = qE' = \dfrac{\chi V_{\text{k}}^2}{2d}$ egyenletből a

(5)
$$V_{\text{k}} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}$$

érték adódik.

(d) Kövessük nyomon a kis korong mozgását, sebességének változását mozgásának egy periódusa alatt! Jelölje a korong sebességének nagyságát az alsó (1), ill. felső (2) fegyverzetnél közvetlenül az ütközés előtt (e) és után (u) rendre $v_{1\text{e}}$ és $v_{1\text{u}}$, ill. $v_{2\text{e}}$ és $v_{2\text{u}}$.



Az ütközési szám definíciója szerint

$$v_{1\mathrm{u}} = \eta v_{1\mathrm{e}}, \qquad v_{2\mathrm{u}} = \eta v_{2\mathrm{e}}. \tag{6}$$

A két ütközés közti felfelé, illetve lefelé való mozgásra felírhatjuk a mechanikai energiamegmaradás tételét. A nehézségi erő munkájából adódó potenciális energiaváltozás $\pm mgd$, míg az elektromos tér munkája $qV = \chi V^2$. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a nehézségi erő munkája negatív a fölfelé történő mozgásnál, és pozitív a lefelé való mozgásnál. Ezzel szemben a Coulomb-erő munkája mindkét esetben pozitív, hiszen az alsó fegyverzeten q töltésűre feltöltött korong a felső fegyverzeten leadja töltését, és $-q$ töltésű lesz. Ezek figyelembevételével a mozgás két szakaszára a mechanikai energiamegmaradás törvénye

$$\text{fel:} \quad \frac{1}{2}mv_{2\mathrm{e}}^2 = \frac{1}{2}mv_{1\mathrm{u}}^2 + \chi V^2 - mgd, \tag{7}$$

$$\text{le:} \quad \frac{1}{2}mv_{1\mathrm{e}}^2 = \frac{1}{2}mv_{2\mathrm{u}}^2 + \chi V^2 + mgd \tag{8}$$

alakban írható. A (6)–(8) egyenletek felhasználásával rendre kifejezhetjük a $v_{2\mathrm{e}}$, $v_{2\mathrm{u}}$ és $v_{1\mathrm{e}}$ sebességeket a $v_{1\mathrm{u}}$ sebességgel:

$$v_{2\mathrm{e}}^2 = v_{1\mathrm{u}}^2 + \frac{2\chi V^2}{m} - 2gd, \tag{9}$$

$$v_{2\mathrm{u}}^2 = \eta^2 v_{2\mathrm{e}}^2 = \eta^2\Big(v_{1\mathrm{u}}^2 + \frac{2\chi V^2}{m} - 2gd\Big), \tag{10}$$

$$v_{1\mathrm{e}}^2 = v_{2\mathrm{u}}^2 + \frac{2\chi V^2}{m} + 2gd = \eta^2 v_{1\mathrm{u}}^2 + (1+\eta^2)\frac{2\chi V^2}{m} + (1-\eta^2)2gd. \tag{11}$$

Végül felhasználva (6) első egyenletét, valamint az utolsó, (11) összefüggést, az állandósult mozgás $v_{1\mathrm{u}} = v_s$ sebességére a következő egyenletet kapjuk:

$$(1-\eta^4)v_s^2 = \eta^2\Big((1+\eta^2)\frac{2\chi V^2}{m} + (1-\eta^2)2gd\Big). \tag{12}$$

Az egyenlet megoldása

$$v_s^2 = \frac{2\chi\eta^2}{m(1-\eta^2)}V^2 + \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2}\,, \tag{13}$$

ahonnan a keresett α és β együttható értéke:

$$\alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1-\eta^2)} \qquad \text{és} \qquad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2}\,. \tag{14}$$

(e) Ha teljesül a $qV \gg mgd$ feltétel, akkor a kondenzátorlemezek között mozgó korongra ható elektrosztatikus erő jóval nagyobb, mint a nehézségi erő, így ez utóbbit elhanyagoljuk. Ekkor a korong mozgása szimmetrikus; az emelkedés és a süllyedés is egyenletesen gyorsuló mozgás, és a két mozgás csak irányában különbözik. Az előző pontban a sebességekre kapott kifejezések egyszerűsödnek, a (13), (9) és (6) formulák és $g = 0$ felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$v_{1\mathrm{u}} = v_{2\mathrm{u}} = \sqrt{\alpha}V, \qquad v_{1\mathrm{e}} = v_{2\mathrm{e}} = \frac{1}{\eta}v_{1\mathrm{u}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta}V. \tag{15}$$

A kis korong mozgásának egyik – például az emelkedési – félperiódusában d utat tesz meg egyenletesen gyorsulva $v_{1\mathrm{u}}$-ról $v_{2\mathrm{e}}$ sebességre, így a félperiódus ideje

$$t = \frac{2d}{v_{1\mathrm{u}} + v_{2\mathrm{e}}} = \frac{2d\eta}{\sqrt{\alpha}(1+\eta)V}\,.$$

Az átszállított töltés $q = \chi V$, tehát az állandósult állapot elérése után a kis korong által szállított áram átlagos értéke $I = \dfrac{q}{t}$, ahonnan a keresett γ együttható:

$$\gamma = \frac{\chi\sqrt{\alpha}(1+\eta)}{2d\eta} = \sqrt{\frac{\chi^3(1+\eta)}{2md^2(1-\eta)}}\,. \tag{16}$$

(f) Ebben a részfeladatban újra figyelembe kell vennünk a nehézségi erő hatását, hiszen kis feszültségértékeknél $qV \not\gg mgd$. A feszültséget csökkentve az áram akkor szűnik meg, amikor a korong sebessége olyan kicsinnyé válik, hogy az már nem emelkedik fel a felső fegyverzetig. A V_c kritikus feszültség mellett a korong éppen $v_{2\mathrm{e}} = 0$ sebességgel éri el a felső lapot. A (9) és (13) összefüggéseket felhasználva a

$$0 = \frac{2\chi\eta^2}{m(1-\eta^2)}V_c^2 + \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2} + \frac{2\chi}{m}V_c^2 - 2gd \tag{17}$$

egyenletet kapjuk a kritikus feszültségre, melynek megoldása:

$$V_c = \sqrt{\frac{mgd(1-\eta^2)}{\chi(1+\eta^2)}} = V_\mathrm{k}\sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}}\,. \tag{18}$$

Az I_c kritikus áram mellett a kis korong éppen eléri a felső fegyverzetet, azaz $v_{2\mathrm{e}} = v_{2\mathrm{u}} = 0$, és lezajlik a töltéscsere – hiszen folyik áram –, tehát a korongra ható Coulomb-erő iránya, és így az eredő erő nagysága is megváltozik a felső holtponton. A kritikus áram mellett (18) és (13) felhasználásával a $v_{1\mathrm{u}}$ és $v_{1\mathrm{e}}$ sebességekre azt kapjuk, hogy

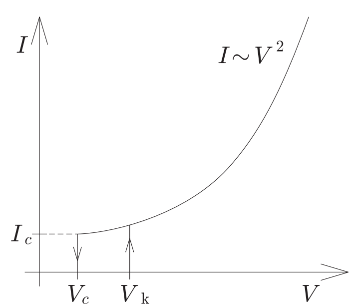
$$v_{1\mathrm{u},c} = 2\eta\sqrt{\frac{gd}{1+\eta^2}}\,, \qquad v_{1\mathrm{e},c} = \frac{v_{1\mathrm{u},c}}{\eta} = 2\sqrt{\frac{gd}{1+\eta^2}}\,. \tag{19}$$

A korong nulla vég-, ill. kezdősebességű egyenletesen lassuló, ill. gyorsuló mozgást végez az emelkedési, ill. süllyedési szakaszon, azonban e két mozgás időtartama nem azonos. A (19) sebességek ismeretében az emelkedés, ill. süllyedés időtartama

$$t_\uparrow = \frac{2d}{v_{1\mathrm{u},c}} = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}}\,, \qquad t_\downarrow = \frac{2d}{v_{1\mathrm{e},c}} = \sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}}\,, \tag{20}$$

és egy teljes periódus alatt átszállított töltés $2\chi V_c$, tehát a kritikus áram:

$$I_c = \frac{2\chi V_c}{t_\uparrow + t_\downarrow} = \frac{2\eta g}{1+\eta^2}\sqrt{m\chi\frac{1-\eta}{1+\eta}}\,. \tag{21}$$



Minthogy $0 < \eta < 1$, a (18) egyenletből látszik, hogy a stacionárius mozgás fenntartásához szükséges V_c feszültség kisebb, mint a korong felemeléséhez szükséges V_k feszültség, tehát az áram–feszültség karakterisztikának *hiszterézise* van. Például $\eta = 0{,}6$ értékű ütközési szám esetén $V_c \approx 0,485 \cdot V_\mathrm{k}$. Az *ábra* vázlatosan mutatja a rendszer karakterisztikáját és a hiszterézist.