Megoldás. Egy négyszög akkor rombusz, ha paralelogramma és az átlói merőlegesek egymásra. Mindkét tulajdonságot egyszerűen le lehet írni vektorok segítségével, ezért így oldjuk meg a feladatot. Jelöljük a négyszög csúcsait A, B, C, D-vel, egy tetszőleges pontból a csúcsokba mutató helyvektorokat pedig $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$-vel.

A vektorok tulajdonságait felhasználva nyilvánvaló a következő két állítás:

1. *A konvex $ABCD$ négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha* $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{d}-\mathbf{c}$.
2. *A konvex $ABCD$ négyszög átlói pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha* $(\mathbf{a}-\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{d})=0$.

Ezt a két vektorokra vonatkozó egyenlőséget kell tehát bebizonyítanunk abból kiindulva, hogy a négyszög bármely két szemközti oldalának felezőpontjai közötti távolság négyzete fele a két oldal négyzetösszegének. Felhasználva a szakasz felezőpontjának helyvektorára vonatkozó képletet, valamint azt, hogy egy vektor négyzete megegyezik hosszának négyzetével, a feltételeket az alábbi két egyenlet írja le:

$$\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}-\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\big((\mathbf{a}-\mathbf{b})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{d})^2\big),$$

$$\left(\frac{\mathbf{d}+\mathbf{a}}{2}-\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\big((\mathbf{d}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2\big).$$

Az egyenleteket rendezve kapjuk, hogy

$$\begin{gathered}(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{d})^2+2(\mathbf{a}-\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{d})=2\big((\mathbf{a}-\mathbf{b})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{d})^2\big),\\ 6pt](\mathbf{a}-\mathbf{c})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{d})^2-2(\mathbf{a}-\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{d})=2\big((\mathbf{d}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2\big).\end{gathered}$$

A két egyenletet összeadva majd a kapott egyenletet rendezve:

$$\begin{gathered}2\big((\mathbf{a}-\mathbf{c})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{d})^2\big)=2\big((\mathbf{a}-\mathbf{b})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{d})^2\big)+2\big((\mathbf{d}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2\big)\\ 0=(\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d})^2.\end{gathered}$$

Ebből viszont $\mathbf{0}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}$ következik, tehát az $ABCD$ négyszög az 1. állításból következően paralelogramma.

Ha pedig a két egyenletet kivonjuk egymásból, és az így kapott egyenletet rendezzük, akkor:

$$\begin{aligned}&4(\mathbf{a}-\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{d})=2\big((\mathbf{a}-\mathbf{b})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{d})^2\big)-2\big((\mathbf{d}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2\big)\\ &(\mathbf{a}-\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{d})=-\mathbf{ab}-\mathbf{cd}+\mathbf{da}+\mathbf{bc}\\ &2(\mathbf{a}-\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{d})=0.\end{aligned}$$

Ez viszont a 2. állításból következően azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a feladatban szereplő négyszög rombusz.