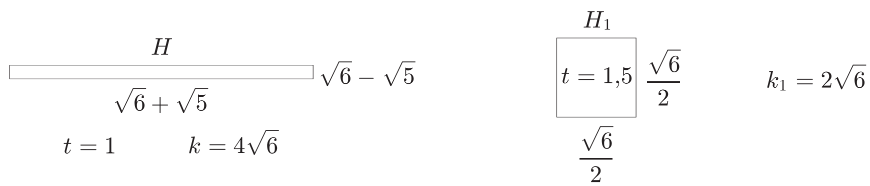
Megoldás. A H téglalap oldalait jelöljük a, b-vel, a H_1 téglalapét pedig c, d-vel. Tudjuk, hogy $T_H = ab = 1$, $K_H = 2(a+b)$, $T_{H_1} = cd = 1{,}5$ (50%-kal nagyobb, mint H területe) és $K_{H_1} = 2(c+d) = a+b$ (50%-kal kisebb, mint H kerülete). $K_H = 2(a+b) = 4(c+d)$ minimumát keressük ezen feltételek mellett. Az a, b, c, d értékek szakaszok hosszai, ezért mind pozitívak. Így oszthatunk d-vel: $c = \dfrac{1{,}5}{d}$, és ezt a korábbi összefüggésekkel egybevetve $K_H = 4(c+d) = \dfrac{6}{d} + 4d$ adódik. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség segítségével becsülhetjük K_H-t, ugyanis tudjuk, hogy

$$\frac{6}{d} + 4d \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{6}{d} \cdot 4d}, \quad \text{azaz} \quad \frac{6}{d} + 4d \geq 4\sqrt{6},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\dfrac{6}{d} = 4d$ teljesül. Tehát H kerülete legalább $4\sqrt{6}$. Belátjuk, hogy ez a becslés éles, azaz létezik olyan H téglalap, melynek ennyi a kerülete és a többi feltételnek is megfelel.

Láttuk, hogy csak akkor lehet egyenlőség, ha $\dfrac{6}{d} = 4d$, azaz $4d^2 = 6$. Mivel d pozitív, azért $d = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, ebből pedig $c = \dfrac{1{,}5}{d} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. A H_1 téglalap tehát négyzet, oldala $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



H oldalai, a és b egymás reciprokai. Ha a H kerülete $4\sqrt{6}$, azaz $2\left(\dfrac{1}{b} + b\right) = 4\sqrt{6}$, akkor $2(1+b^2) = 4\sqrt{6}b$, ahonnan rendezés után a $2b^2 - 4\sqrt{6}b + 2 = 0$ másodfokú egyenlet adódik, melynek gyökei:

$$b_{1,2} = \frac{4\sqrt{6} \pm \sqrt{96-16}}{4} = \sqrt{6} \pm \sqrt{5}.$$

A gyökök szorzata az ismert azonosság alapján $6 - 5 = 1$, vagyis a két gyök ugyanazt a téglalapot határozza meg. A feltételeknek megfelelő minimális kerületű H téglalap oldalai tehát $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ és $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

Megjegyzés. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség közvetlen felhasználása helyett néhányan egy ismert eredményre hivatkoztak: az egyik téglalap kerülete a másik fele, így a kerületük ugyanakkor lesz minimális. Ezzel a feladatot arra vezethetjük vissza, hogy adott területű téglalapok közül melyiknek minimális a kerülete. Ez a négyzet (a fenti megoldásból is kiderül, hogy a H_1 téglalap négyzet), mint az a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségből bizonyítható. Mások például egy-egy másodfokú egyenlet diszkriminánsának vizsgálatával jutottak a helyes eredményhez.