Megoldás. Megmutatjuk, hogy az adott feltételek igen erős megszorítást jelentenek az s_i számokra: közülük legfeljebb három lehet pozitív és ha az indexek növekvő sorrendjében egy kör mentén rendezzük el őket, akkor ez a három nem nulla elem szomszédos. A megoldás során ennek megfelelően ciklikusan értelmezzük az indexeket, tehát $s_{2005} = s_1$ stb.

A megadott számok összege 2 és egyikük sem negatív. Van tehát köztük pozitív, a szimmetria miatt föltehető, hogy ez s_1. Megmutatjuk, hogy ekkor az s_1-gyel ciklikusan szomszédos két elem összege, $s_{2004} + s_2 = 1$ és minden további páros indexű elem értéke nulla.

Legyen tehát $s_1 > 0$ és jelölje A a páros indexű elemek összegét. Csoportosítsuk a feltételben adott összeg tagjait kettesével és emeljük ki az ezekben a párokban közös páratlan indexű tényezőket: $1 = s_1s_2 + s_2s_3 + \ldots + s_{2004}s_1 = s_1(s_{2004}+s_2)+s_3(s_2+s_4)+\ldots+s_{2003}(s_{2002}+s_{2004})$. A jobb oldal felülről becsülhető: az egyes tagokban $s_{2i}+s_{2i+2} \leq A$, az első tényező pedig nem negatív; a jobb oldal tehát legfeljebb

$$s_1A + s_3A + \ldots + s_{2003}A = \underbrace{(s_1 + s_3 + \ldots + s_{2003})}_{2-A} A = (2 - A)A.$$

Mivel $A \geq 0$, azért a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség szerint $(2-A)A \leq 1$, a teljes egyenlőtlenségláncot figyelembe véve mindenütt egyenlőség van! Így $A = 1$, továbbá $s_1(s_{2004}+s_2) = s_1A = s_1$, $s_3(s_2+s_4) = s_3$, $s_5(s_4+s_6) = s_5, \ldots, s_{2003}(s_{2002}+s_{2004}) = s_{2003}$. Mivel $s_1 \neq 0$, az $s_1(s_{2004}+s_2) = s_1$ egyenlőségből valóban $s_{2004}+s_2 = 1$ következik, és ha figyelembe vesszük, hogy a páros indexű elemek összege, $A = 1$, valóban azt kapjuk, hogy miden további páros indexű elem nulla. A ciklikus szimmetria most már azt jelenti, hogy bármelyik nem nulla elemet közrefogó két elemnek 1 az összege, a velük azonos paritású helyeken álló további elemek értéke pedig nulla. Ebből az is következik, hogy ha két elem indexe ellenkező paritású, akkor mind a kettő csak úgy lehet pozitív, ha szomszédosak.

Most s_1 két szomszédjának az összege 1, ezért egyikük, például s_2 szintén pozitív. A fentiek szerint tehát $s_1+s_3 = 1$, a további páratlan indexű elemek, $s_5, s_7, \ldots, s_{2003}$ értéke pedig ugyancsak nulla. Emellett s_3 és s_{2004} nem szomszédosak, az indexük ellenkező paritású, egyikük tehát ugyancsak nulla. Így pedig $s_1 + s_3 = s_2 + s_{2004} = 1$ miatt s_1 vagy s_2 értéke 1.

Vizsgálatainkat összefoglalva: a megadott feltételek esetén a 2004 darab szám között legfeljebb három nullától különböző van, ezek ciklikusan szomszédosak, közülük a középső értéke 1, két szomszédjának pedig 1 az összege.

Az ilyen számokra nyilván teljesülnek a feladat feltételei, befejezésül tehát az $x^2 + y^2 + 1$ összeg legkisebb és legnagyobb értékét kell meghatároznunk az $x + y = 1$, $0 \leq x, y$ feltétel mellett. Ez az

$$f(x) = x^2 + (1-x)^2 + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

függvény szélsőértékeinek a meghatározását jelenti a $[0; 1]$ intervallumon. A teljes négyzet alakból leolvasható, hogy a függvény legkisebb értéke $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$, a legnagyobb értéke pedig $f(0) = f(1) = 2$.

A 2004 darab szám S négyzetösszegére tehát $\frac{3}{2} \leq S \leq 2$. Ha $s_1 = s_3 = \frac{1}{2}$, $s_2 = 1$, a további elemek értéke pedig nulla, akkor $S = \frac{3}{2}$, ha pedig $s_1 = s_2 = 1$, a további elemek értéke pedig nulla, akkor $S = 2$.

Megjegyzés. A megoldás során kihasználtuk, hogy az elemek száma páros és hogy legalább hat elem van. Ha csak 4 darab számunk van, akkor könnyen igazolható, hogy $1 \leq S \leq 2$ (a minimum az $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = \frac{1}{2}$ választással adódik), a páratlan sok szám esete viszont nem látszik könnyűnek.