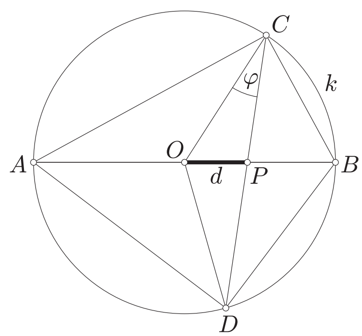
Megoldás. Jelölje az adott kört k, a középpontját O, az OP távolságot pedig d. Azt vizsgáljuk meg, hogyan függ a szóban forgó maximum a d értékétől. Nyilván $0 \le d < 1$. Jegyezzük meg, hogy a négyszög csúcsai a körüljárás sorrendjében A, D, C és B, a továbbiakban ezt a sorrendet használjuk.

Ha $d = 0$, vagyis $P = O$, akkor a négyszög átlói a k kör átmérői. Ismeretes, hogy egy négyszög kétszeres területe az átlók és a hajlásszögük szinuszának a szorzata. Az átlók hossza most a kör átmérője, a hajlásszögük szinusza pedig legfeljebb 1 és pontosan akkor ennyi, ha az átlók merőlegesek. Ebből következik, hogy ha $d = 0$, azaz P a kör középpontjában van, akkor a négyszög területe legfeljebb 2 egység és ha az átlók merőlegesek, akkor éppen ennyi.

Legyen most $d > 0$. Az ADB és ODP háromszögek D-ből induló magassága közös, így területük arányára $\frac{T_{ADB}}{T_{ODP}} = \frac{AB}{OP}$ (*1. ábra*) és ugyanígy kapjuk, hogy $\frac{T_{ABC}}{T_{OPC}} = \frac{AB}{OP}$. Eszerint

$$T_{ADBC} = T_{COD} \cdot \frac{AB}{OP} = T_{COD} \cdot \frac{2}{d}. \tag{1}$$

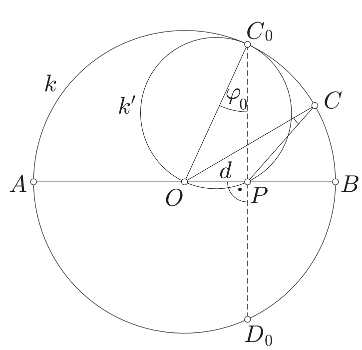
Az $ADBC$ négyszög területe tehát akkor maximális, ha a COD háromszög területe, $\frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin COD\sphericalangle$ a lehető legnagyobb.



1. ábra

Ebben a szorzatban $OC = OD = 1$, vagyis a COD háromszög területe akkor a legnagyobb, ha $\sin COD\sphericalangle$ maximális. Legyen $\varphi = OCP\sphericalangle = ODP\sphericalangle$. Ekkor $\sin COD\sphericalangle = \sin(180^\circ - 2\varphi) = \sin 2\varphi$, ennek a legnagyobb értékét keressük tehát, miközben C befutja az AB körívet. Ha φ_0 jelöli az $OCP\sphericalangle$ maximumát, akkor 2φ a $]0; 2\varphi_0]$ intervallumon változik. A $\sin 2\varphi$ maximális értéke tehát attól függ, hogy ez az intervallum tartalmazza-e a derékszöget, azaz φ_0 és 45° viszonyától. Határozzuk meg tehát a P adott helyzetében a φ szög legnagyobb értékét.

Tekintsük ehhez az OP szakasznak azt a k' látókörét, amelyik érinti az AB körívet (*2. ábra*). (A szimmetria miatt elegendő a felső félsíkra szorítkoznunk.) Ha C_0 az érintési pont, akkor az AB ív C_0-tól különböző C pontja a k' látókör külső pontja, az ismert tétel szerint tehát $\varphi = OCP\sphericalangle < OC_0P\sphericalangle = \varphi_0$, a φ szög akkor maximális, ha $C = C_0$. A látókör érintési pontjaként a maximumot szolgáltató C_0 pont helyzete közvetlenül is adódik, ha észrevesszük, hogy az OC_0 szakasz a k-t érintő k' látókörben átmérő: Thalész tétele szerint ekkor C_0P merőleges AB-re, vagyis C_0-t az AB-re P-ben állított merőleges metszi ki k-ból: $\sin \varphi_0 = \frac{OP}{OC_0} = d$.



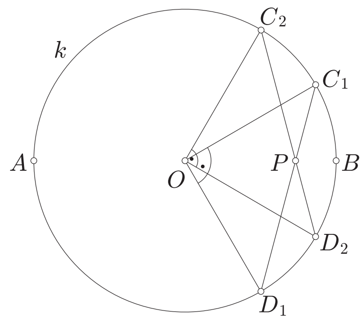
2. ábra

Ha $\varphi_0 < 45^\circ$, ami pontosan akkor teljesül, ha $d = \sin \varphi_0 < \frac{\sqrt{2}}{2}$, akkor C minden megengedett helyzetében $2\varphi < 90^\circ$. A 2φ szinusza ezért akkor a legnagyobb, ha 2φ a lehető legnagyobb, azaz $C = C_0$, a négyszög átlói merőlegesek. Ekkor

$$T_{ADBC} \le T_{AD_0BC_0} = \frac{2}{d} \cdot T_{C_0OD_0} = \frac{2}{d} d\sqrt{1-d^2} = 2\sqrt{1-d^2}.$$

(Vegyük észre, hogy eredményünk a $d = 0$ esetet is magában foglalja.)

Ha $\varphi_0 \geq 45°$, ami pontosan akkor teljesül, ha $d = \sin \varphi_0 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, akkor 2φ lehet derékszög, $\sin 2\varphi$ legnagyobb értéke tehát 1. Ekkor a COD háromszög területe $\frac{1}{2}$, az $ACBD$ négyszögé pedig (1) szerint $\frac{1}{d}$. Megjegyezzük, hogy a $d > \frac{\sqrt{2}}{2}$ esetben a P ponton keresztül két olyan helyzete is van a CD húrnak, amelyre $COD\sphericalangle = 90°$, a megfelelő C_1, C_2 pontokat az OP szakasz $45°$-os látóköre metszi ki az AB ívből (*3. ábra*).



3. ábra

Eredményeinket összefoglalva:

$$\max T_{ACBD} = \begin{cases} 2\sqrt{1 - OP^2}, & \text{ha } 0 \leq OP < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{1}{OP}, & \text{ha } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq OP < 1. \end{cases}$$