Megoldás. Legyen a tartály aljától a vízsugár becsapódási pontjába mutató vektor vízszintes komponense x, a függőleges komponense y, a vektor hossza pedig d (lásd az *ábrát*)!

A víz (a Torricelli-féle kiáramlási törvény szerint)

$$v=\sqrt{2g(H-h)}$$

nagyságú vízszintes kezdősebességgel hagyja el a tartályt, és a víznek egy-egy „darabkája” a függőleges mozgásából számíthatóan

$$t=\sqrt{\frac{2(h+y)}{g}}$$

idő alatt éri el a lejtőt. Ezalatt a vízszintes elmozdulása

$$x=vt=2\sqrt{(H-h)(h+y)}.$$

Mivel a lejtő hajlásszöge α, fennáll $y=x\operatorname{tg}\alpha$. Ezt a fenti összefüggésbe helyettesítve, majd négyzetre emelve x-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x^2-4(H-h)(h+x\operatorname{tg}\alpha)=0. \tag{1}$$

Ennek az egyenletnek mindig van 2 valós megoldása, melyekből a számunkra érdekes pozitív gyök $x=2(H-h)\operatorname{tg}\alpha+2\sqrt{(H-h)^2\operatorname{tg}^2\alpha+(H-h)h}$. Célszerű bevezetni az ábrán is látható $z=H-h$ jelölést, ezzel

$$x=2z\operatorname{tg}\alpha+2\sqrt{z^2\operatorname{tg}^2\alpha+z(H-z)}.$$

Ennek az $x(z)$ kifejezésnek keressük (a $0\le z\le H$ intervallumon) a maximumát. Mivel $x(0)=0$ és $0<z<H$ esetén $x>0$, az $x(z)$ függvénynek vagy ott van maximuma, ahol a z szerinti deriváltja nulla, vagy pedig a $z=H$ helyen.

A derivált eltűnéséből

$$x'(z)=2\operatorname{tg}\alpha+\frac{2z\operatorname{tg}^2\alpha+H-2z}{\sqrt{z^2\operatorname{tg}^2\alpha+z(H-z)}}=0,$$

azaz

$$2\operatorname{tg}\alpha\sqrt{z^2\operatorname{tg}^2\alpha+z(H-z)}=2z(1-\operatorname{tg}^2\alpha)-H. \tag{2}$$

Mivel a bal oldal nemnegatív, a jobb oldal első tagja pozitív kell legyen. Ez akkor teljesül, ha $\operatorname{tg}\alpha<1$, azaz $\alpha<45^\circ$. Másrészt (2) jobb oldala nemnegatív, vagyis

$$z\ge\frac{H}{2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}. \tag{3}$$

A (2) egyenlet, amely négyzetre emelés után z-re nézve másodfokú, algebrai átalakítások után $4(\operatorname{tg}^2\alpha-1)z^2+4Hz-H^2=0$ alakra hozható. A diszkrimináns

$$D=16\,H^2+4\cdot4(\operatorname{tg}^2\alpha-1)H^2=(4H\operatorname{tg}\alpha)^2,$$

(2) megoldásai tehát

$$z_{1,2}=\frac{H\mp H\operatorname{tg}\alpha}{2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}. \tag{4}$$

Figyelembe véve a (3) egyenlőtlenséget, (4) jobb oldalán a pozitív előjelet kell választanunk:

$$z=\frac{H+H\operatorname{tg}\alpha}{2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}=\frac{H}{2}\,\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}.$$

Ennek az értéke nem lehet nagyobb H-nál:

$$\frac{H}{2}\,\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}\le H,\quad\text{ahonnan}\quad\operatorname{tg}\alpha\le\frac{1}{2},\qquad\alpha\le26{,}6^\circ$$

következik. Ha ez nem teljesül, akkor az adott intervallumban $x(z)$-nek nem lehet nulla a deriváltja, így $x(z)$ a maximumát $z=H$-nál, vagyis $h=0$-nál veszi fel.

A vízsugár tehát $\alpha\le26{,}6^\circ$-nak megfelelő lejtőn

$$h=H-z=H-\frac{H}{2}\,\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-2\operatorname{tg}\alpha}{2-2\operatorname{tg}\alpha}H$$

érték esetén csapódik be legmesszebb, és a becsapódás távolsága

$$d=\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{H}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

Ha viszont $\alpha \geq 26{,}6^\circ$, akkor az edény legalján kilövellő víz csapódik be legmesszebb, nevezetesen

$$d = \frac{4H \sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

távolságra a tartály aljától.

Megjegyzések. 1. $\alpha = 0$ szögnél az eredmény megegyezik a vízszintes talajon álló tartály egyszerűbb esetével: $h = H/2$ és $d = h$ (lásd a **P. 3673.** feladat megoldását lapunk 373. oldalán).

2. A legnagyobb becsapódási távolságot elemi matematikával (differenciálszámítás nélkül) is meg lehet határozni. Tekintsük az (1) egyenletet, és határozzuk meg adott becsapódási távolság (vagyis adott x) mellett azt a h értéket (vagy értékeket), amely éppen ehhez az x-hez tartozik. Az (1) egyenlet h-ra nézve (is) másodfokú:

$$h^2 + h(x \operatorname{tg}\alpha - H) + \left(\frac{x^2}{4} - Hx \operatorname{tg}\alpha\right) = 0,$$

amelynek akkor van (valós) megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív:

$$(x \operatorname{tg}\alpha - H)^2 - x^2 + 4Hx \operatorname{tg}\alpha = \big[x(\operatorname{tg}\alpha + 1) + H\big]\big[x(\operatorname{tg}\alpha - 1) + H\big] \geq 0.$$

A bal oldali szögletes zárójelben álló kifejezés nem negatív, tehát a másik szögletes zárójelben álló kifejezés sem lehet negatív, így x-re az

$$x \leq \frac{H}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$$

egyenlőtlenség adódik; ez éppen a fenti megoldásban megkapott d értéknek felel meg. A megfelelő kiömlési magasság:

$$h = \frac{1 - 2\operatorname{tg}\alpha}{2 - 2\operatorname{tg}\alpha} H.$$

Mivel ez nem lehet negatív, $\operatorname{tg}\alpha > 1/2$ esetén nem a fenti kifejezésnek, hanem $h = 0$-nak megfelelő $x = 4H \operatorname{tg}\alpha$ adja meg a legnagyobb becsapódási távolság vízszintes vetületét.