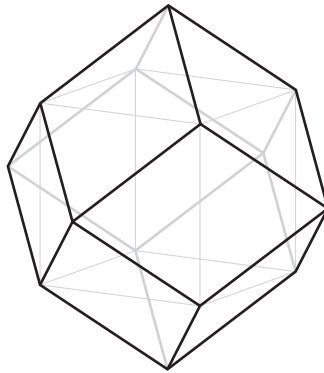
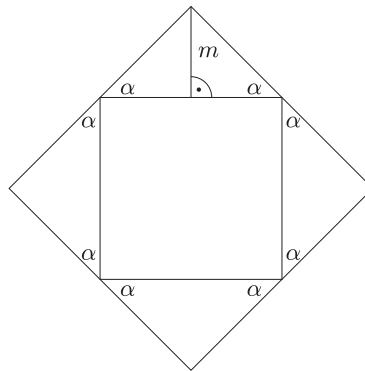


**I. megoldás.** A feladatban szereplő test előállítható úgy, hogy a kiindulási kocka minden lapjára egy-egy gúlát emelünk (1. ábra). Ezeknek a gúláknak az alaplappja a kocka megfelelő lapja, oldallapjaikat pedig a kocka megfelelő lapjára illeszkedő négy-négy élére helyezett síkok határozzák meg. A kocka szimmetriája miatt ezek a gúlák egybevágóak.



1. ábra

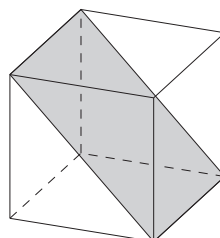
A gúlák testmagasságának meghatározásához tekintsük a testnek egy olyan síkkal való metszetét, amely a kocka valamelyik élének felezőmerőleges síkja. Egy ilyen sík a kockának három másik, a kiválasztott éllel párhuzamos élét is felezi, a hat gúla közül pedig négynek a csúcsát tartalmazza (2. ábra). Mivel a kocka élére helyezett síkok  $45^\circ$ -os szöget zárnak be a kocka lapjaival, ezért az ábrán  $\alpha$ -val jelölt szögek  $45^\circ$ -osak. Vagyis a négy kis háromszög mindegyike egyenlő szárú és derékszögű, ezért az ábrán  $m$ -mel jelölt magasságuk – ami egyúttal a gúlák magassága is – hossza éppen az átfogó fele, vagyis  $\frac{1}{2}$ .



2. ábra

Tehát a kis gúlák térfogata  $\frac{1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$ , s így a test térfogata  $1 + 6 \cdot \frac{1}{6} = 2$  térfogategység.

**II. megoldás.** Tekintsük a kocka két-két testátlója által meghatározott összesen hat darab síkot. Ezen síkok mindegyike a kocka két-két élére illeszkedik, s a kockának az ezen éleket tartalmazó lapsíkjaival  $45^\circ$ -os szögeket zár be. (Egy ilyen síknak a kocka belsejébe eső része látható a 3. ábrán.) Ezek a síkok a kockát hat darab négyzetalapú gúlára bontják, a kocka középpontja a hat gúla közös csúcsa. Tükrözzük e hat gúla mindegyikét a kocka megfelelő lapsíkjára. Mivel a gúlák oldallapjai a kocka megfelelő lapsíkjával  $45^\circ$ -os szöget zárnak be, ezért a tükröképek  $90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ -os szöget zárnak be a megfelelő lapsíkokkal. Vagyis éppen a feladatunkban szereplő síkokat, és így az azok által határolt testet kapjuk.



3. ábra

Tehát a síkok által határolt konvex test 12 egybevágó gúlából áll, s ezért térfogata az eredeti kocka térfogatának kétszerese, vagyis 2 térfogategység.

*Megjegyzés.* A feladatban vizsgált test a *rombikus dodekaéder* (mert 12 lapja van és azok mindegyike rombusz). A testnek sok érdekes tulajdonsága van, ezekről részletes leírást találhat az érdeklődő olvasó pl. *H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai* című könyvének 22.4. fejezetében.