

I. megoldás. Közös nevezőre hozunk és a számlálót alakítjuk:

$$\frac{x^4 - 10x^2(x - 5)}{(x - 5)^2} = 11.$$

Ezt az egyenletet a következő alakban is írhatjuk:

$$\left(\frac{x^2}{x-5}\right)^2 - 10 \cdot \frac{x^2}{x-5} - 11 = 0.$$

Alkalmazzuk az $y = \frac{x^2}{x-5}$ helyettesítést: $y^2 - 10y - 11 = 0$, ennek gyökei: $y_1 = 11$ és $y_2 = -1$.

1. eset: $\frac{x^2}{x-5} = 11$, amiből $x^2 - 11x + 55 = 0$; ennek a másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke, mivel a diszkriminánsa negatív.

2. eset: $\frac{x^2}{x-5} = -1$, amiből $x^2 + x - 5 = 0$. Ekkor $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Ezek a számok az eredeti egyenletnek is gyökei, mert átalakításaink ekvivalensek.

II. megoldás. Az értelmezési tartomány (a nevező miatt): $x \neq 5$. Az $(x - 5)^2$ -nel való beszorzás és rendezés után kapjuk, hogy

$$x^4 - 10x^3 + 39x^2 + 110x - 275 = 0.$$

Az egyenlet bal oldalán lévő kifejezés szorzattá bontható:

$$(x^2 + x - 5)(x^2 - 11x + 55) = 0.$$

A bal oldalon kéttényezős szorzat áll. Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért két esetet vizsgálunk.

1. eset: Ha $x^2 + x - 5 = 0$, akkor $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

2. eset: Ha $x^2 - 11x + 55 = 0$, akkor a diszkrimináns: $D = 121 - 220 < 0$. Ennek az egyenletnek nincs valós megoldása.

Tehát az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$.