I. megoldás. Bizonyítsuk az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval.

Az $n = 1$ esetén $5^n - 8n^2 + 4n - 1 = 5 - 8 + 4 - 1 = 0$ és $64 \mid 0$. Az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy valamilyen n természetes számra teljesül az állítás. A kifejezés értéke $(n+1)$-re:

$$5^{n+1} - 8(n+1)^2 + 4(n+1) - 1 = 5 \cdot 5^n - 8(n^2 + 2n + 1) + 4n + 4 - 1 =$$

$$= 5 \cdot 5^n - 8n^2 - 16n - 8 + 4n + 4 - 1 = 5 \cdot 5^n - 8n^2 - 12n - 5 =$$

$$= 5 \cdot (5^n - 8n^2 + 4n - 1) + 32n^2 - 32n = 5 \cdot (5^n - 8n^2 + 4n - 1) + 32n(n-1).$$

Az $5^n - 8n^2 + 4n - 1$ az indukciós feltevés szerint osztható 64-gyel, ezért ennek ötszöröse is osztható 64-gyel. A $32n(n-1)$ is osztható 64-gyel, hiszen két egymást követő természetes szám ($n-1$ és n) valamelyike biztosan páros, így a 32-szerese osztható 64-gyel. Ha két 64-gyel osztható számot összeadunk, akkor az összegük is osztható 64-gyel, tehát $(n+1)$-re is igaz az állítás.

Ezzel minden n pozitív egészre beláttuk, hogy $5^n - 8n^2 + 4n - 1$ osztható 64-gyel.

II. megoldás. Ha $n = 1$, akkor az első megoldás behelyettesítése szerint az állítás igaz. Legyen az n legalább 2 és az $5^n - 8n^2 + 4n - 1$ kifejezés első tagját írjuk fel úgy, mint két tag összegének hatványát: $(4+1)^n$. A binomiális tétel alapján ekkor

$$5^n - 8n^2 + 4n - 1 = 4^n + \binom{n}{1} \cdot 4^{n-1} + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-3} \cdot 4^3 + \binom{n}{n-2} \cdot 4^2 + \binom{n}{n-1} \cdot 4 + 1 - 8n^2 + 4n - 1.$$

Mivel az első $n-2$ tag mindegyikében a 4 kitevője legalább 3 és $4^3 = 64$, ezek a tagok oszthatók 64-gyel. Ezeken kívül pedig

$$\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} \qquad \text{és} \qquad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1},$$

ezért

$$\binom{n}{n-2} \cdot 4^2 + \binom{n}{n-1} \cdot 4 + 1 - 8n^2 + 4n - 1 =$$

$$= \binom{n}{2} \cdot 4^2 + \binom{n}{1} \cdot 4 + 1 - 8n^2 + 4n - 1 =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \cdot 16 + 4n + 1 - 8n^2 + 4n - 1 = 8n^2 - 8n + 4n + 1 - 8n^2 + 4n - 1 = 0,$$

ami szintén osztható 64-gyel. Ez azt jelenti, hogy $5^n - 8n^2 + 4n - 1$ előáll 64-gyel osztható számok összegeként, ezért osztható 64-gyel.