Megoldás. A megoldás során föltesszük, hogy $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}-x\right)$ és $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+x\right)$ értelmesek. A három mennyiségnek hatféle sorrendje lehetséges, azonban az esetek száma csökkenthető. Először is vegyük észre, hogy amennyiben a középső elemet rögzítjük, akkor a két szélső elem sorrendje a feladat szempontjából közömbös, három (nem nulla) szám egy adott sorrendben pontosan akkor alkot mértani sorozatot, ha a két szélső tagot felcserélve ugyancsak mértani sorozatot kapunk. (A sorozat hányadosa a csere után a reciprokára változik.) Ezzel az esetek száma a felére csökken.

Másfelől az $x \leftarrow -x$ helyettesítés fölcseréli $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}-x\right)$ és $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+x\right)$ értékét, így a $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}-x\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+x\right)$ mennyiségekre ebben a sorrendben akkor és csak akkor teljesül a feladat feltétele, ha az adott helyettesítés után $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+x\right)$ és $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}-x\right)$ alkotnak mértani sorozatot. Így elegendő két esetre szorítkoznunk: ha $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$, illetve ha $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}-x\right)$ a középső elem.

Jelölje $\operatorname{tg} x$ értékét y és az egyszerűség kedvéért legyen $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=t$. A megfelelő addíciós tételek felhasználásával

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}-x\right)=\frac{t-y}{1+ty} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+x\right)=\frac{t+y}{1-ty}.$$

Ismeretes, hogy három nullától különböző szám pontosan akkor lesz egy mértani sorozat három szomszédos tagja, ha a középső tag négyzete egyenlő a másik két tag szorzatával. Az első esetben, ha t a középső tag, akkor

$$t^2=\frac{t-y}{1+ty}\cdot\frac{t+y}{1-ty}=\frac{t^2-y^2}{1-t^2y^2},$$

ahonnan $t^4y^2-y^2=0$. Mivel $t^4\neq 1$, azért innen $y=0$ következik, azaz $x=k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám. Ekkor a három szám egyenlő és nem nulla, valóban mértani sorozatot alkotnak.

Ha $\frac{t-y}{1+ty}$ a középső elem, akkor a feltétel szerint most a

$$t\cdot\frac{t+y}{1-ty}=\left(\frac{t-y}{1+ty}\right)^2$$

egyenletet kapjuk. A műveleteket elvégezve és y hatványai szerint rendezve, majd szorzattá alakítva a

$$(t^2+1)y\left[ty^2+(t^2-1)y+3t\right]=0$$

egyenlet adódik. Ha $y=0$, akkor a számok egyenlők, az előző megoldást kapjuk, egyébként $t\neq 0$-val osztva az $y^2-\frac{1-t^2}{t}y+3=0$ egyenletet kell megoldanunk. Az elsőfokú tag együtthatója igen megnyugtató: a $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ azonosság szerint

$$\frac{1-t^2}{t}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}=\frac{2}{\operatorname{tg} 2\cdot\frac{\pi}{12}}=\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{3}.$$

A másodfokú egyenlet bal oldala tehát $y^2-2\sqrt{3}y+3=\left(y-\sqrt{3}\right)^2$, ahonnan $y=\sqrt{3}=\operatorname{tg}^{-1}\frac{\pi}{3}$. Ekkor $x=\frac{\pi}{3}+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, a három szám pedig $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ és $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$, amelyek ebben a sorrendben valóban mértani sorozatot alkotnak, a hányados $q=-\left(2+\sqrt{3}\right)$.

A korábbiak szerint az eddigiek mellett az $x=-\frac{\pi}{3}+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$ alakú számok is megoldásai a feladatnak, ekkor a $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+x\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}-x\right)$ értékek adják a fenti mértani sorozatot.

A feladat megoldásai tehát az $x=\varepsilon\cdot\frac{\pi}{3}+n\pi$ alakú számok, ahol ε a -1, 0, 1 értékek valamelyike, n pedig tetszőleges egész szám.

Megjegyzések. 1. Érdemes felfigyelni arra, hogy a feladat nem triviális megoldása a nyilvánvaló $\operatorname{tg} 15^\circ\cdot\operatorname{tg} 75^\circ=1=\operatorname{tg}^2 45^\circ$ azonosság átirata. A jobb oldal ugyanis $\operatorname{tg}^2(-45^\circ)$-nek is írható, így pedig az argumentumok a -45°, 15°, 75° elrendezésben olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek középső tagja 15° $\left(\frac{\pi}{12}\right)$, míg a megfelelő tangens értékek a $\operatorname{tg} 15^\circ$, $\operatorname{tg}(-45^\circ)$, $\operatorname{tg} 75^\circ$ sorrendben alkotnak mértani sorozatot.

2. A megoldás során minden további nélkül használtuk, hogy $\operatorname{tg} 15^\circ$ pontos értéke $2-\sqrt{3}$. Ez például a szokásos módon igazolható a különbség tangensére vonatkozó azonosság és $\operatorname{tg} 45^\circ=1$, illetve $\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ismert értékeinek felhasználásával:

$$\operatorname{tg} 15^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ-30^\circ)=\frac{\operatorname{tg} 45^\circ-\operatorname{tg} 30^\circ}{1+\operatorname{tg} 45^\circ\cdot\operatorname{tg} 30^\circ}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3}=2-\sqrt{3}.$$