Megoldás. Jelölje a feladatban adott $414213462 \cdot 10^{-9}$ törtrészt T. Egy, a feladat feltételeinek megfelelő szám négyzetgyökének egészrészét pedig jelölje A.

A keresett szám négyzetgyökének törtrésze kisebb kell legyen, mint

$$0{,}414213463 = T + 10^{-9}.$$

Jelöléseinkkel a feladat tehát így fogalmazható meg: keressünk olyan B egész számot, amelyre

$$A + T \le \sqrt{B} < A + T + 10^{-9}.$$

Azaz négyzetre emelve:

$$(A+T)^2 \le B < (A + T + 10^{-9})^2.$$

Ahhoz, hogy az egyenlőtlenség bal és jobb oldala közrefogjon (legalább) egy egész számot, elegendő, ha a különbségük legalább 1 (persze, ha a különbség egészrésze k, akkor az egyenlőtlenség-rendszernek k darab megoldása van):

$$(A + T + 10^{-9})^2 - (A+T)^2 > 1.$$

$$10^{-9} \cdot (2A + 2T + 10^{-9}) > 1,$$

azaz

$$2 \cdot 10^{-9} \cdot A + 2 \cdot 10^{-9} \cdot T + 10^{-18} > 1.$$

Válasszuk A-t olyannak, hogy $2 \cdot 10^{-9} \cdot A$ éppen 1 legyen: $A = 5 \cdot 10^8$. (Természetesen *minden* ennél nagyobb egész szám alkalmas.)

$A + T = 5 \cdot 10^8 + 0{,}414213462$. Az az egész szám, amely $(A+T)^2$-nél még éppen nagyobb, biztosan megfelel: $\left[(A+T)^2\right] + 1$ (ez $(A+T)^2$ felső egészrésze, jele: $\left\lceil (A+T)^2 \right\rceil$) egy lehetséges megoldás:

$$B = 25 \cdot 10^{16} + 2 \cdot 5 \cdot 10^8 \cdot 414213462 \cdot 10^{-9} + 1 = 25 \cdot 10^{16} + 414213463.$$

Sehol nem használtuk fel T valamilyen speciális tulajdonságát, ezért a megoldás általánosítható bármilyen k hosszúságú tetszőleges számjegyekből álló törtrészre:

$$B = 25 \cdot 10^{2k-2} + T \cdot 10^k + 1.$$

$$5 \cdot 10^{k-1} + T \le \sqrt{B} < 5 \cdot 10^{k-1} + T + 10^{-k}.$$