

**Megoldás.** Az egyenlet két oldalán egy-egy függvény szerepel.

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 2x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{x^5 - 2x}.$$

Ha valamely  $x_0$ -ra  $f(x_0) = g(x_0)$ , akkor jelölje  $t_0$  ezt a közös függvényértéket. Ekkor

$$(f(x_0))^5 = x_0^3 + 2x_0 = t_0^5, \quad (g(x_0))^3 = x_0^5 - 2x_0 = t_0^3.$$

A két kifejezés összegéből

$$x_0^5 + x_0^3 = t_0^5 + t_0^3.$$

Az  $x^5 + x^3$  függvény a teljes valós halmazon szigorúan monoton növekvő lévén ez csak úgy teljesülhet, ha  $x_0 = t_0$ . Eszerint

$$x_0^3 + 2x_0 = x_0^5, \quad \text{illetve} \quad x_0^5 - 2x_0 = x_0^3.$$

Mindkét egyenlet ugyanazt fejezi ki:  $x_0^5 - x_0^3 - 2x_0 = 0$ . Ebből  $x_0(x_0^4 - x_0^2 - 2) = 0$  adódik, amelynek valós megoldásai

a 0, illetve  $\pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}}$ -ből  $\sqrt{2}$  és  $-\sqrt{2}$ .

A három szám valóban kielégíti az eredeti egyenletet, más valós megoldás pedig nem lehet.