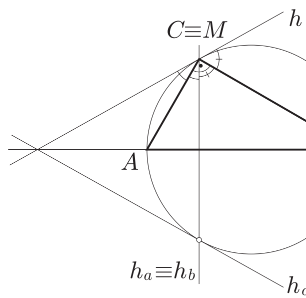
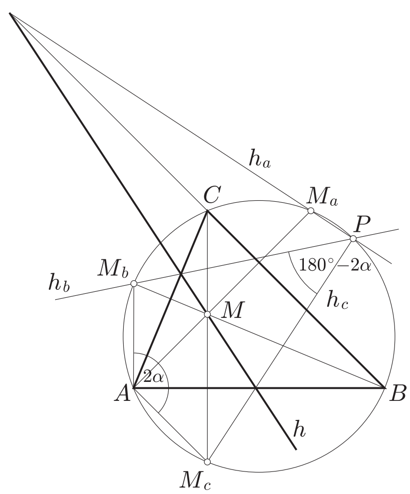
Megoldás. Mivel a középvonalak párhuzamosak az eredeti háromszög megfelelő oldalaival, az eredeti háromszög oldalfelező merőlegesei a középvonalak által alkotott háromszögben magasságvonalak. Vagyis az eredeti háromszög körülírható körének középpontja éppen a középvonalak által alkotott háromszög magasságpontja. Elegendő tehát a következő állítást belátnunk:

Egy háromszög magasságpontján áthaladó egyenesnek a háromszög oldalegyeneseire vett tükörképei egy ponton mennek át.

Jelöljük a háromszög csúcsait A, B, C-vel, szögeit a szokásos módon α, β, γ-val. Válasszuk úgy a jelölést, hogy $90^\circ > \alpha \geq \beta$ teljesüljön. A magasságpontot jelölje M, az ezen áthaladó adott egyenest h, ennek az oldalakra vonatkozó tükörképeit h_a, h_b és h_c, M-nek az oldalegyenesekre vonatkozó tükörképeit pedig M_a, M_b és M_c. Mivel h átmegy M-en, azért h_x átmegy M_x-en ($x = a, b, c$). Tudjuk továbbá (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I.,* 1079. feladat), hogy az M_x pontok rajta vannak az ABC háromszög köré írt k körön.

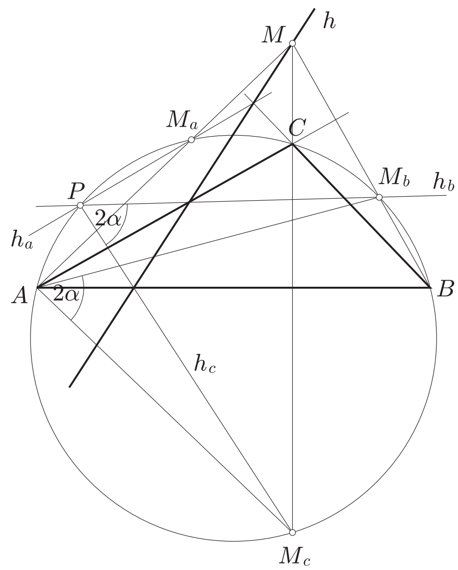


1. ábra

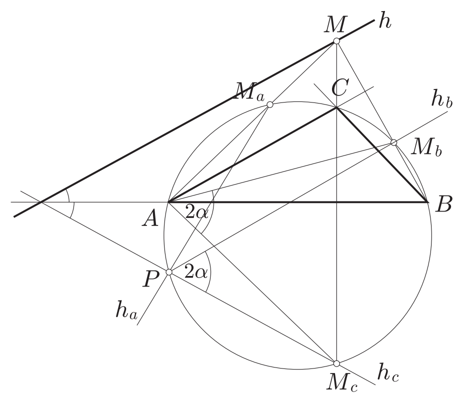


2. ábra

A továbbiakban négy esetet különböztetünk meg. Ha $\gamma = 90^\circ$ (*1. ábra*), akkor h_a és h_b egybeesik, az állítás nyilvánvaló. Ha γ hegyesszög, akkor a *2. ábrán,* ha pedig γ tompaszög, akkor h helyzetétől függően a *3.* vagy a *4. ábrán* látható lehetőségeket kell vizsgálnunk. Mindhárom esetben igaz, hogy AC felezi az M_bAM, AB pedig felezi az M_cAM szöget. Ezért $M_bAM_c\sphericalangle = 2\alpha$ (mert $M_bAM_c\sphericalangle = 2 \cdot M_cAM\sphericalangle \pm 2 \cdot M_bAM\sphericalangle = 2 \cdot CAB\sphericalangle$). Ha a h_c egyenest előbb az AB, majd a képét az AC egyenesre tükrözzük, akkor a h_b egyenest kapjuk, hiszen az első tükrözésnél h_c képe h. Viszont a két tükrözés egymásutánja megegyezik egy A körüli $2 \cdot BAC\sphericalangle = 2\alpha$ szögű elforgatással. Tehát h_c-t h_b-be egy 2α szögű elforgatás viszi. Ezért a két egyenes egymással 2α (vagy $2\alpha > 90^\circ$ esetén $180^\circ - 2\alpha$) szöget zár be. Ha a két egyenes metszéspontját P jelöli, akkor az egyes eseteknek megfelelően azt kapjuk, hogy $M_bPM_c\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$ (*2. ábra*), illetve $M_bPM_c\sphericalangle = 2\alpha$ (*3. és 4. ábra*). Tehát P minden esetben rajta van az M_bAM_c háromszög köré írt körön. Ez a kör egyúttal az ABC háromszög köré írt köre is, azaz megegyezik k-val. Ugyanígy láthatjuk be, hogy h_c és h_a metszéspontja – jelöljük Q-val – is rajta van a k körön.



3. ábra

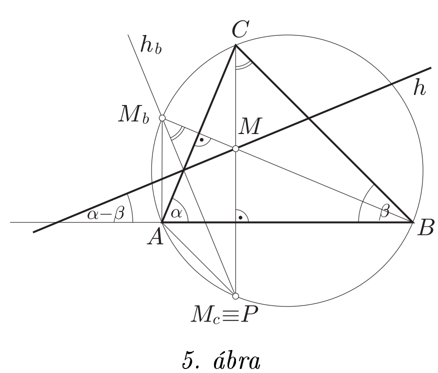


4. ábra

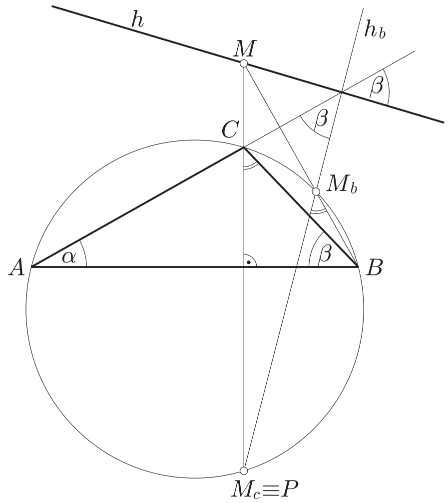
Ha P egybeesik M_c-vel, akkor h_b megegyezik az M_bM_c egyenessel. A kerületi szögek tétele miatt $M_cM_bB\sphericalangle = M_cCB\sphericalangle = 90^\circ - \beta$, ezért az AC oldallal h_b is, és így h is β szöget zár be (*5.*, ill. *6. ábra*). Tehát az AB oldallal h is, és így h_c is $\alpha - \beta$ szöget zár be. Ezért h_c az AB-re merőleges CM egyenessel $90^\circ - (\alpha - \beta)$ szöget zár be. A kerületi szögek tétele miatt

$$M_cBC\sphericalangle = M_cBA\sphericalangle + ABC\sphericalangle = M_cCA\sphericalangle + \beta = 90^\circ - \alpha + \beta,$$

ezért az A-t tartalmazó M_cC ívhez tartozó kerületi szög megegyezik h_c és M_cC szögével, h_c tehát M_c-ben érinti k-t. Ebből viszont következik, hogy Q is egybeesik M_c-vel, tehát ebben az esetben igaz az állításunk. Ugyanígy látható be az állítás abban az esetben is, ha azt tesszük fel, hogy Q esik egybe M_c-vel.



5. ábra



6. ábra

Ha viszont se P, se Q nem esik egybe M_c-vel, akkor mindkettőjüknek egybe kell esnie h_c és k M_c-től különböző metszéspontjával, tehát állításunk ekkor is igaz.

Eredeti állításunknál többet is bizonyítottunk. Mivel azt is megmutattuk, hogy a h_a, h_b és h_c egyenesek közös pontja mindig rajta van k-n, azért az eredeti feladatban szereplő tükörképek közös pontja rajta van a háromszög középvonalai által alkotott háromszög köré írt körön, ami nem más, mint az eredeti háromszög Feuerbach-köre.