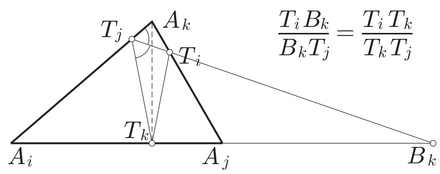
I. megoldás. Tudjuk, hogy egy hegyesszögű háromszög magasságvonalai egyúttal a talpponti háromszög belső szögfelezői is (ennek bizonyítása megtalálható pl. a *Geometriai feladatok gyűjteménye* I. kötetének 1060. feladatában). Ezért a $T_1T_2T_3$ háromszög T_i csúcsához tartozó belső szögfelezője a T_iA_i egyenes, s így a külső szögfelező az erre merőleges A_jA_k egyenes (ahol $\{i;j;k\}=\{1;2;3\}$).

A külső szögfelező tétel szerint a szögfelező az őt közrefogó oldalak arányában osztja a szemközti oldalt, vagyis

$$\frac{T_1B_3}{B_3T_2}=\frac{T_1T_3}{T_3T_2},\quad \frac{T_2B_1}{B_1T_3}=\frac{T_2T_1}{T_1T_3}\quad \text{és}\quad \frac{T_3B_2}{B_2T_1}=\frac{T_3T_2}{T_2T_1}.$$

Tehát

$$\frac{T_1B_3}{B_3T_2}\cdot\frac{T_2B_1}{B_1T_3}\cdot\frac{T_3B_2}{B_2T_1}=\frac{T_1T_3}{T_3T_2}\cdot\frac{T_2T_1}{T_1T_3}\cdot\frac{T_3T_2}{T_2T_1}=1.$$



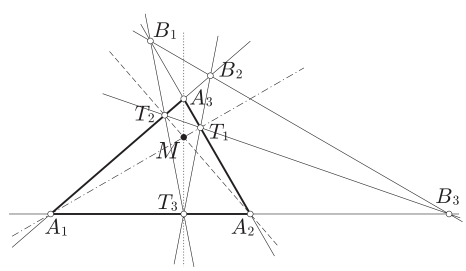
1. ábra

Azonban a B_i pontok nem a T_jT_k oldalszakaszokon, hanem azok meghosszabbításain fekszenek, ezért ha előjeles szakaszokkal számolunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{T_1B_3}{B_3T_2}\cdot\frac{T_2B_1}{B_1T_3}\cdot\frac{T_3B_2}{B_2T_1}=-1.$$

Ez pedig Menelaosz tételének megfordítása szerint (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I;* 1261. feladat) azt jelenti, hogy a B_1, B_2, B_3 pontok egy egyenesen vannak, ami éppen a bizonyítandó állítás.

II. megoldás. Az $A_1A_2A_3$ és $T_1T_2T_3$ háromszögek megfelelő csúcsait összekötő egyenesek egy ponton, az $A_1A_2A_3$ háromszög magasságpontján mennek át (*2. ábra*). Ezért Desargues tételéből (lásd pl. *Schmidt Tamás: Geometriai terek az algebra szemszögéből,* lapunk 2004. évi 4. számának 199–206. oldalain) következik, hogy a két háromszög megfelelő oldalegyeneseinek metszéspontjai egy egyenesen vannak. Mivel B_i éppen $A_jA_k\cap T_jT_k$ (ahol $\{i;j;k\}=\{1;2;3\}$), a B_1, B_2, B_3 pontok egy egyenesen vannak.



2. ábra

Megjegyzés. A második megoldás során nem használtuk ki, hogy a T_i pontok a magasságok talppontjai. Az állítás minden olyan $T_1T_2T_3$ háromszög esetén igaz, amelyre teljesül, hogy az A_iT_i $(i=1,2,3)$ egyenesek egy ponton mennek át.