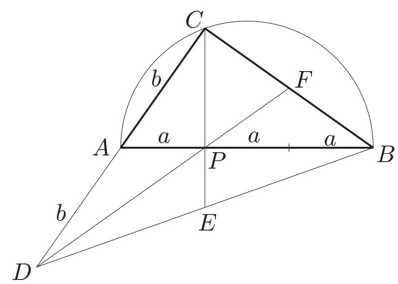
I. megoldás. Létezik olyan háromszög, ahol a súlyvonalak által meghatározott egyik háromszög hasonló az eredetihez. Először megadjuk a konstrukciót a háromszög szerkesztésével, majd belátjuk, hogy ez jó.

Felveszünk egy AB szakaszt, azt elharmadoljuk és megszerkesztjük a Thalész-körét. Az egyik harmadolópontból, P-ből, merőlegest állítunk AB-re, ennek metszéspontja a körrel C. $ACB\sphericalangle = 90°$, mert C rajta van AB Thalész-körén. AC-t meghosszabbítjuk A-n túl a saját hosszával, a szakasz végpontja legyen D. A CP egyenes és a DB szakasz metszéspontja legyen E. A DBC háromszögnek AB súlyvonala, mivel $AC = AD$. CE is súlyvonala a DBC háromszögnek, mert a másik súlyvonalnak, AB-nek a megfelelő harmadolópontján halad át. Az APC háromszög tehát a DBC háromszög súlyvonalai által meghatározott egyik háromszög.

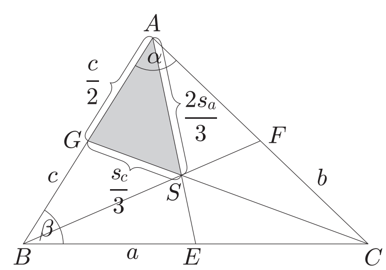


Azt állítjuk, hogy az APC háromszög hasonló a DBC háromszöghöz.

$APC\sphericalangle = DCB\sphericalangle = 90°$. Ugyanakkor, mivel a DBC háromszög derékszögű és CE a háromszög derékszögű csúcsból induló súlyvonala, $DE = EC$ $(= EB)$, azaz a DEC háromszög egyenlő szárú, így $CDE\sphericalangle = ECD\sphericalangle$. Tehát az APC háromszög és a DCB háromszög két szöge megegyezik, vagyis a két háromszög valóban hasonló.

Megjegyzés. A hasonlóságot és néhány Pitagorasz-tételt felírva kevés számolás után meghatározható, hogy a DCB háromszög oldalainak aránya $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

II. megoldás. Válasszuk ki tetszőlegesen az egyik kis háromszöget a hat közül ($AGS\triangle$). Vizsgáljuk meg, hogy a nagy háromszög oldalainak hosszára milyen feltételt jelent e két háromszög hasonlósága. Felhasználjuk a súlypont harmadoló tulajdonságát. Tudjuk továbbá, hogy minden ilyen kis háromszögnek a területe $\frac{1}{6}$-a a nagy háromszög területének. Így hasonlóság csak $\frac{1}{\sqrt{6}}$ aránnyal teljesülhet. Ebből az is következik, hogy az ABC háromszög c oldalának nem lehet az AGS háromszög $AG = \frac{c}{2}$ oldala a megfelelője.



A szögeket figyelve észrevehetjük, hogy $GAS\sphericalangle < \alpha$, így a $GS = \frac{s_c}{3}$ oldal nem lehet a nagy háromszög a oldalának a képe. Valamint GC nyilván nem párhuzamos BC-vel, így $AGC\sphericalangle \neq \beta$, tehát az $AS = \frac{2s_a}{3}$ nem lehet a nagy háromszög b oldalának a képe.

Két lehetőségünk maradt:

I. $\quad \frac{c}{2} = a' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot a, \qquad \frac{s_c}{3} = b' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot b, \qquad \frac{2s_a}{3} = c' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot c,$

II. $\quad \frac{c}{2} = b' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot b, \qquad \frac{s_c}{3} = c' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot c, \qquad \frac{2s_a}{3} = a' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot a.$

Mivel a súlyvonalak hosszát ki tudjuk fejezni a háromszög oldalhosszainak a segítségével, így már csak az a dolgunk, hogy megvizsgáljuk, hogy az a^2, b^2, c^2-re kapott elsőfokú egyenletrendszer nem vezet-e ellentmondáshoz. Ha nem vezet, akkor létezik ilyen háromszög, mellesleg meg fogjuk kapni oldalainak arányát. Ha ellentmondásra vezet, akkor pedig nem létezik ilyen háromszög.

Kezdjük:

I.

$$\left.\begin{array}{lll}(1a) & \dfrac{c^2}{4}=\dfrac{a^2}{6}, & \\ (2a) & \dfrac{s_c^2}{9}=\dfrac{b^2}{6}, & s_c^2=\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4}, \\ (3a) & \dfrac{4s_a^2}{9}=\dfrac{c^2}{6}, & 4s_a^2=2b^2+2c^2-a^2;\end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$(1b)\quad 3c^2=2a^2,\qquad (2b)\quad \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4\cdot 9}=\frac{b^2}{6},\qquad (3b)\quad \frac{2b^2+2c^2-a^2}{9}=\frac{c^2}{6};$$

$$\Downarrow$$

$$(1c)\quad 3c^2=2a^2,\qquad (2c)\quad 2a^2+2b^2-c^2=6b^2,\qquad (3c)\quad 4b^2+4c^2-2a^2=3c^2;$$

$(1c)$-t írjuk be a $(2c)$ és a $(3c)$ egyenletbe is:

$$(2d)\quad 3c^2+2b^2-c^2=6b^2,\qquad (3d)\quad 4b^2+4c^2-3c^2=3c^2;$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll}(2e) & 2c^2=4b^2 \\ (3e) & 4b^2=2c^2\end{array}\right\}\ \text{A két egyenlet ekvivalens, nem kaptunk tehát ellentmondást.}$$

$$3c^2=2a^2=6b^2$$

$$\frac{c^2}{2}=\frac{a^2}{3}=b^2$$

$$\frac{c}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=b,$$

vagyis az oldalak aránya ebben az esetben $a:b:c=\sqrt{3}:1:\sqrt{2}$.

II.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{c^2}{4}=\dfrac{b^2}{6}, \\ \dfrac{s_c^2}{9}=\dfrac{c^2}{6}, \\ \dfrac{4s_a^2}{9}=\dfrac{a^2}{6};\end{array}\right\}$$

Az előzőhöz hasonlóan végül két ekvivalens egyenlethez jutunk. Itt $3a^2=6c^2=4b^2$, amiből $a:b:c=2:\sqrt{3}:\sqrt{2}$.

Ezzel az összes lehetséges háromszöget megkaptuk. Az I. eset az első megoldásban megadott derékszögű háromszöget szolgáltatta. A II. esetbeli háromszög nem derékszögű, így lényegesen ritkábban bukkant föl a dolgozatokban.