Megoldás. Legyen a kúp alapkörének sugara r, magassága m, alkotója a. Ekkor $V = \frac{r^2\pi m}{3} = 1$, $r^2 = \frac{3}{m\pi}$. Pitagorasz tétele szerint

$$a = \sqrt{r^2 + m^2} = \sqrt{\frac{3}{m\pi} + m^2}.$$

A kúp felszíne:

$$A = r^2\pi + r\pi a = \frac{3}{m\pi} \cdot \pi + \sqrt{\frac{3}{m\pi}} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{3}{m\pi} + m^2} = \frac{3}{m} + \pi \cdot \sqrt{\frac{9}{m^2\pi^2} + \frac{3m}{\pi}}.$$

Rendezve:

$$A - \frac{3}{m} = \sqrt{\frac{9}{m^2} + 3m\pi}.$$

Mivel $A \geq \frac{3}{m}$, négyzetre emelhetünk:

$$A^2 - \frac{6A}{m} + \frac{9}{m^2} = \frac{9}{m^2} + 3m\pi, \quad A^2m - 6A = 3m^2\pi, \quad 3m^2\pi - A^2m + 6A = 0.$$

Így

$$m_{1,2} = \frac{A^2 \pm \sqrt{A^4 - 72A\pi}}{6\pi}.$$

A diszkriminánsnak nemnegatívnak kell lennie, tehát

$$A^4 - 72A\pi \geq 0, \quad \text{azaz} \quad A \geq \sqrt[3]{72\pi}.$$

Tehát a minimális felszín $A = \sqrt[3]{72\pi}$.

Ekkor $D = 0$, így

$$m = \frac{A^2}{6\pi} = \frac{\sqrt[3]{(72\pi)^2}}{6\pi} = \sqrt[3]{\frac{72^2 \cdot \pi^2}{6^3 \cdot \pi^3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}.$$

$$r^2 = \frac{3}{m\pi} = \frac{3}{\pi \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{\pi^3 \cdot 2^3 \cdot \frac{3}{\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2^3 \cdot \pi^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{\pi^2}}.$$

Így $r = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$.

Tehát az egységnyi térfogatú forgáskúpok közül a legkisebb felszínűnek a magassága $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$, az alapkörének sugara $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$.