Megoldás. Jelölje a szokásos módon a háromszög oldalait a, b, c, szögeit α, β, γ, területét T és kerületét $2s$. Először bebizonyítunk egy lemmát:

Tetszőleges háromszögben ha egy szög koszinuszának 1-gyel növelt értékét megszorozzuk a körülírt kör sugarának kétszeresével, akkor a szöget bezáró két oldalhoz hozzáírt körök sugarának összegét kapjuk.

Bizonyítás: Mivel a szögek szerepe a háromszögben szimmetrikus, elegendő megmutatnunk, hogy

$$2R(1+\cos\gamma)=r_a+r_b.$$

Ismert (lásd pl. *Kiss Gy.: Amit jó tudni a háromszögekről,* KöMaL 2002/3, 130–139. old.), hogy

$$R=\frac{abc}{4T},\quad r_a=\frac{T}{s-a}\quad \text{és}\quad r_b=\frac{T}{s-b}.$$

A koszinusztételből $\cos\gamma$-t az oldalak segítségével kifejezve kapjuk, hogy

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Állításunk bizonyításához elegendő tehát azt megmutatnunk, hogy

$$2\cdot\frac{abc}{4T}\cdot\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+1\right)=\frac{T}{s-a}+\frac{T}{s-b}.$$

Ezzel ekvivalens állítást kapunk, ha mindkét oldalt megszorozzuk $4T$-vel és felhasználjuk Héron képletét, mely szerint $T^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$.

$$2abc\cdot\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+1\right)=4\cdot\big(s(s-b)(s-c)+s(s-a)(s-c)\big).$$

Mindkét oldalt egyszerűbb alakra hozva:

$$c\cdot(a^2+b^2-c^2+2ab)=4s(s-c)\big((s-b)+(s-a)\big),$$

ami nyilvánvalóan teljesül, mert s definíciója miatt $(s-b)+(s-a)=c$ és $4s(s-c)=2s(2s-2c)=(a+b)^2-c^2$. Ezzel a lemmát beláttuk.

A lemmát használva a feladat kérdésére könnyen válaszolhatunk, hiszen a két adott egyenlet így írható:

$$2R(1+\cos\gamma)=3R\quad \text{és}\quad 2R(1+\cos\alpha)=2R.$$

Az egyenleteket $2R$-rel elosztva és rendezve kapjuk, hogy

$$\cos\gamma=\frac{1}{2}\quad \text{és}\quad \cos\alpha=0,$$

amiből $\gamma=60^\circ$ és $\alpha=90^\circ$.

Tehát a háromszög szögei 90°, 60° és $180^\circ-(90^\circ+60^\circ)=30^\circ$ lehetnek. Ellenőrizhető, hogy az ilyen szögekkel rendelkező háromszögekben a körök sugaraira megkívánt összefüggések teljesülnek.