Pach Péter Pál megoldása. Ha $20 \mid n$, akkor az n utolsó jegye 0 és $4 \mid n$ miatt az utolsó előtti jegy páros, így ekkor az n-nek nincsen alternáló többszöröse. A továbbiakban több lépésben igazoljuk, hogy a $20 \nmid n$ feltétel elégséges, ebben az esetben létezik olyan alternáló szám, amelyik osztható n-nel.

a) Legyen először $n = 2^k$. Megmutatjuk, hogy létezik olyan alternáló számokból álló $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ sorozat, amelyben A_k-nak k jegye van ($k = 1, 2, \ldots$), A_{k+1} az A_k „folytatása", tehát első jegyét elhagyva A_k-t kapjuk, $2^k \mid A_k$, továbbá $2^{k+1} \mid A_k$ pontosan akkor teljesül, ha k páros. Az A_k sorozatot teljes indukcióval állítjuk elő: $k = 1$, illetve $k = 2$ esetén $A_1 = 2$ és $A_2 = 32$ megfelelő.

Legyen $k \geq 2$ páros és tegyük fel, hogy az A_k számot már megadtuk a feltételeknek megfelelően, tehát A_k k-jegyű alternáló szám és osztható 2^{k+1}-nel. Mivel k páros, A_k első jegye páratlan. Így akár 2-est, akár 4-est írunk a szám elejére, $(k+1)$-jegyű alternáló számot kapunk és $2^{k+1} \mid 2 \cdot 10^k$, illetve $2^{k+1} \mid A_k$ miatt mindkét esetben 2^{k+1} többszörösét kapjuk. Mivel $k+1$ páratlan, meg kell még mutatnunk, hogy $2 \cdot 10^k + A_k$ és $4 \cdot 10^k + A_k$ valamelyike nem osztható 2^{k+2}-nel. Ez nyilvánvaló, ellenkező esetben ugyanis a különbségük, $2 \cdot 10^k = 2^{k+1} \cdot 5^k$ is osztható volna 2^{k+2}-nel. Így ha k páros, akkor létezik a megfelelő A_{k+1}.

Legyen most a k páratlan. Ekkor A_k első jegye páros, így 1-et, illetve 3-at írva a szám elejére $(k+1)$-jegyű alternáló számot kapunk. A konstrukció szerint $2^k \mid A_k$ és $2^{k+1} \nmid A_k$, így $A_k \equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$, továbbá nyilván $1 \cdot 10^k \equiv 3 \cdot 10^k \equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$. A megfelelő kongruenciákat összeadva kapjuk, hogy mindkét így adódó szám osztható 2^{k+1}-nel. Mivel a különbségükben, $2 \cdot 10^k = 2^{k+1} \cdot 5^k$-ban is $k+1$ a 2 kitevője, azért legalább az egyikük még 2^{k+2}-nel is osztható. Így az $A_{k+1} = 10^k + A_k$ vagy $A_{k+1} = 3 \cdot 10^k + A_k$ választás megfelelő.

b) Ha $n = 5^k$, akkor ismét indukcióval megmutatjuk, hogy az n-nek van legfeljebb k-jegyű B_k alternáló többszöröse. (B_k legelső jegye lehet 0 is.)

Ha $k = 1$, akkor $B_1 = 5$ megfelelő. Legyen $k \geq 1$ és a B_k olyan, legfeljebb k-jegyű alternáló szám, amelyre $B_k \equiv 0 \pmod{5^k}$. Ekkor valamilyen $i \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ számra $B_k \equiv i \cdot 5^k \pmod{5^{k+1}}$. Ha B_k elejére egy újabb x számjegyet akarunk betoldani, akkor az oszthatósághoz

$$x \cdot 10^k + B_k \equiv 0 \pmod{5^{k+1}}, \quad \text{azaz} \quad x \cdot 10^k + i \cdot 5^k = 5^k(x \cdot 2^k + i) \equiv 0 \pmod{5^{k+1}}$$

szükséges. Ez pontosan akkor teljesül, ha $x \cdot 2^k + i \equiv 0 \pmod 5$. Mivel $(2^k; 5) = 1$, azért ennek a kongruenciának van megoldása mod 5. Végül vegyük észre, hogy az x paritását megválaszthatjuk, hiszen a páros, illetve a páratlan számjegyek is egy-egy teljes maradékrendszert alkotnak (mod 5). Így a megfelelő választással $B_{k+1} = x \cdot 10^k + B_k$ is alternáló szám lesz, amely osztható 5^{k+1}-nel.

c) Ha $(10; n) = 1$, akkor a feladat állításán túlmenően azt igazoljuk, hogy az $x \equiv r \pmod n$ kongruenciának minden r maradék esetén létezik adott paritású alternáló megoldása.

Először azt mutatjuk meg, hogy ha $(10; n) = 1$, akkor van olyan teljes maradékrendszer (mod n), amelynek az elemei csak a 2 és a 0 számjegyeket tartalmazzák.

Az Euler–Fermat-tétel szerint ugyanis $10^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$, így ha $k_1, k_2, \ldots, k_r$ különböző pozitív egészek, akkor

$$T_r = 10^{k_1\varphi(n)} + 10^{k_2\varphi(n)} + \ldots + 10^{k_r\varphi(n)} \equiv \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{r} \equiv r \pmod n,$$

a T_r számokból tehát teljes maradékrendszer készíthető (mod n). Mivel $(2; n) = 1$, azért a $2T_r$ számok is teljes maradékrendszert alkotnak (mod n) és rendelkeznek az előírt tulajdonsággal.

Tekintsünk most egy olyan $H = 1010\ldots10$ alakú alternáló számot, amely a fenti $2T_r$ alakú számokból álló teljes maradékrendszer minden eleménél több jegyből áll. Ekkor az $A + 2T_r$ alakú számok is teljes maradékrendszert alkotnak (mod n), másrészt maguk is alternálók, hiszen a H alternáló számhoz olyan „rövidebb" számokat adtunk, amelyek minden jegye páros és a jegyek kicsik, tehát nincs tízes átlépés. Ebben az alternáló teljes maradékrendszerben minden szám páros.

Ha most a

$$10H + 1 = \underbrace{1010\ldots10}_{H}1$$

páratlan alternáló számhoz adjuk hozzá a teljes maradékrendszer $2T_r$ elemeit, akkor alternáló páratlan számokból álló teljes maradékrendszert kapunk (mod n).

Ebből következik, hogy ha $(10; n) = 1$, akkor n-nek van alternáló többszöröse, az erősebb állításra a későbbiekben lesz szükség.

d) Hátra van még az az eset, amikor n osztható 2-vel vagy 5-tel, de nem osztható 20-szal. Ha $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n_1$, ahol $(n_1; 10) = 1$, akkor vagy $\alpha \leq 1$ és $\beta > 0$, vagy pedig $\alpha \geq 1$ és $\beta = 0$. Ha $\alpha \leq 1$ és $\beta > 0$, akkor *b*) szerint $5^{\beta-1}$-nek létezik legfeljebb $(\beta - 1)$-jegyű B alternáló többszöröse, amelynek utolsó jegye, 5, páratlan. Így $B_1 = 10B$ β-jegyű alternáló szám és $\alpha \leq 1$ miatt $2^\alpha \cdot 5^\beta \mid B_1$.

Olyan C alternáló számot keresünk, amelyre $D_1 = C \cdot 10^\beta + B_1$ is alternáló és osztható n-nel. Mivel $2^\alpha \cdot 5^\beta \mid 10^\beta$, azért $2^\alpha \cdot 5^\beta \mid D_1$. Most $(10; n_1) = 1$, tehát *c*) szerint az $x \cdot 10^\beta + B_1 \equiv 0 \pmod{n_1}$ kongruenciának létezik adott paritású alternáló megoldása, így B_1 első jegyének paritásától függően olyan is, amelyre D_1 is alternáló. Miután most $(n_1; 2) = (n_1; 5) = 1$, azért $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n_1 \mid D_1$.

Végül ha $\beta = 0$ és $\alpha \geq 1$, akkor ugyanígy okoskodhatunk. a) szerint van olyan α-jegyű A alternáló szám, amelyre $2^\alpha \mid A$, c) szerint pedig a $10^\alpha \cdot x + A \equiv 0 \pmod{n_1}$ kongruenciának van adott paritású alternáló megoldása. Ekkor $2^\alpha \mid 10^\alpha$, tehát $2^\alpha \mid 10^\alpha \cdot x + A$, $(2; n_1) = 1$ miatt $n = 2^\alpha \cdot n_1 \mid 10^\alpha \cdot x + A$ és x paritását az A első jegyével ellentétesnek választva $10^\alpha \cdot x + A$ is alternáló szám lesz.

Ezzel minden esetet megvizsgáltunk, a bizonyítást befejeztük.