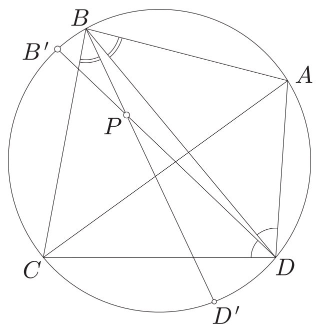
**Kocsis Albert Tihamér megoldása.** Először azt látjuk be, hogy ha $ABCD$ húrnégyszög, akkor $PA = PC$. Legyen $BP$ és a kör metszéspontja $D'$, $DP$ és a kör metszéspontja pedig $B'$ (*1. ábra*).



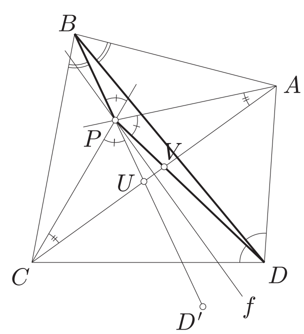

*1. ábra*

$ABD\sphericalangle = D'BC\sphericalangle$, az $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{D'C}$ ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlők, így $D$ és $D'$ az $AC$ felező merőlegesére tükrösek. Ekkor a $BD'$ és a $B'D$ egyenesek is tükrösek erre a felező merőlegesre, a metszéspontjuk, $P$ tehát rajta van az $AC$ felező merőlegesén és így valóban $PA = PC$.

A megfordításhoz legyen $PA = PC$. Belátjuk, hogy a feladat feltételei mellett $ABCD$ húrnégyszög. Először egy segédtételre lesz szükségünk:

Ha adott egy $XYZ$ háromszög és a síkjában egy $Q$ pont, akkor a háromszög csúcsait a $Q$-val összekötő egyeneseknek az adott csúcson átmenő belső szögfelezőkre vonatkozó tükörképei egy ponton haladnak át (esetleg párhuzamosak). A bizonyítás megtalálható például Reiman István – Dobos Sándor: *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák (1959–2003)* (Typotex Kiadó, Budapest) c. könyvének függelékében.

Most a $BPD$ háromszög játssza az $XYZ$ háromszög szerepét, a $Q$ pontét pedig az $A$ pont. $DA$ tükörképe a $PDB$ szög felezőjére éppen a $DC$ egyenes, míg a $BA$ tükörképe a $DBP$ szög felezőjére a $BC$ egyenes. Ez a két egyenes most a $C$ pontban metszi egymást, így a $PA$ egyenesnek a $DPB$ szög felezőjére vonatkozó tükörképe a segédtétel állítása szerint átmegy a $C$ ponton (*2. ábra*). Ez a tükörkép tehát a $CP$ egyenes.




*2. ábra*

Ekkor $APB\sphericalangle = 180° - DPC\sphericalangle$, így ha $U = PB \cap AC$ és $V = DP \cap AC$, akkor $VPC\sphericalangle = APU\sphericalangle$. Miután a feltétel szerint $PA = PC$, továbbá $PAU\sphericalangle = PCV\sphericalangle$, így $PUV\sphericalangle = PVU\sphericalangle$, a $PUV$ háromszög egyenlő szárú. Jelölje az $AC$ felező merőlegesét $f$.

Ekkor $PD$ és $PB$ tükrösek $f$-re, ez ugyanis a $PUV$ háromszög szimmetriatengelye, a $PD$ és $PB$ egyenesek pedig a szárai.

Legyen a $D$ csúcs tükörképe $f$-re $D'$. Az előbbi szimmetria miatt $D'$ illeszkedik a $PB$ egyenesre. A feltétel miatt $ABD\sphericalangle = D'BC\sphericalangle$, tehát az $ADD'C$ szimmetrikus trapézban az egyenlő hosszú $AD$ és $D'C$ szakaszok a $B$ pontból egyenlő szögben látszanak. Az $AD$ szakasz $ABD$ szögű látóköre és a $D'C$ szakasz $D'BC$ szögű látóköre tehát egybevágó, másrészt ez a két kör is szimmetrikus az $f$-re. Ha egybeesnek, akkor $B$ rajta van ezen a körön, amely egyébként a szimmetrikus $ADD'C$ trapéz körülírt köre és készen vagyunk, $ABCD$ húrnégyszög.

Ha a két látókör nem esik egybe, akkor $B$ metszéspontjuk rajta van a két kör $f$ szimmetriatengelyén. A fenti gondolatmenetet az $ADC$ helyett az $ABC$ háromszögre és a megfelelő $B'$ pontra megismételve kapjuk, hogy ha a négy pont, $A$, $B$, $C$, $D$ nincs egy körön, akkor $D$ is rajta van az $f$ egyenesen. Ha tehát nem igaz az állítás, akkor $BD$ az $AC$ átló felezőmerőlegese, az $ABCD$ négyszög deltoid, $BD$ felezi mind az $ADC$, mind pedig az $ABC$ szöget. Ezt viszont a feltétel kizárja, az adott feltételek esetén tehát $ABCD$ valóban húrnégyszög.