Egri Attila megoldása. A bizonyítás indirekt: Tegyük fel, hogy valamilyen a, b és c számokra t_a, t_b és t_c nem egy háromszög oldalai, tehát pl. $t_a \geq t_b + t_c$.

A feladat szerint:

$$n^2+1 > (t_1+t_2+\dots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\dots+\frac{1}{t_n}\right) =$$

$$= n + \sum_{i<j}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right) = n + \sum_{\substack{i<j\\ i,j\notin\{a;b;c\}}}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right) + \frac{t_a}{t_b}+\frac{t_b}{t_a}+\frac{t_a}{t_c}+\frac{t_c}{t_a}+\frac{t_b}{t_c}+\frac{t_c}{t_b}.$$

A jobb oldalon a szumma jelen belül használjuk fel, hogy $x \in \mathbb{R}^+$-ra $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Így azt kapjuk, hogy

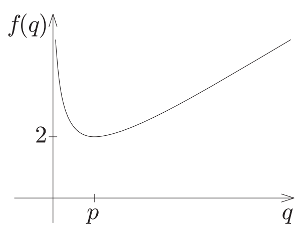
$$n^2+1 > n + 2\cdot\left[\binom{n}{2} - 3\right] + \frac{t_a}{t_b}+\frac{t_b}{t_a}+\frac{t_a}{t_c}+\frac{t_c}{t_a}+\frac{t_b}{t_c}+\frac{t_c}{t_b}. \tag{1}$$

Belátjuk, hogy az indirekt $t_a \geq t_b + t_c$ feltevésből a nyilvánvaló $T = \frac{t_a}{t_b}+\frac{t_b}{t_a}+\frac{t_a}{t_c}+\frac{t_c}{t_a}+\frac{t_b}{t_c}+\frac{t_c}{t_b} \geq 6$ becslésnél erősebb $T \geq 7$ is megkapható.

Ehhez használjuk fel, hogy ha p-t rögzítjük és q-t p felé közelítjük, akkor $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$ értéke csökken. Ez leolvasható az $f(q) = \frac{p}{q}+\frac{q}{p}$ grafikonjáról (*ábra*), de közvetlen bizonyítás is nyomban adódik:

$$pqr\big(f(q)-f(r)\big) = p^2r + q^2r - r^2p - q^2p = (r-p)(q^2-rp).$$

Ha pedig r elválasztja p-t és q-t, akkor a szorzat tényezői azonos előjelűek, így $0 \leq p, q, r$ miatt $f(q) \geq f(r)$ valóban.



Ezek után írjunk T-ben t_a helyére (t_b+t_c)-t. Mivel $t_a \geq t_b + t_c \geq t_b$ és $t_a \geq t_b + t_c \geq t_c$, azért a fentiek szerint ezzel T csökken.

$$\frac{t_a}{t_b}+\frac{t_b}{t_a} \geq \frac{t_b+t_c}{t_b}+\frac{t_c}{t_b+t_c} = 1 + \frac{t_c}{t_b}+\frac{t_b}{t_b+t_c}, \quad \text{illetve}$$

$$\frac{t_a}{t_c}+\frac{t_c}{t_a} \geq \frac{t_b+t_c}{t_c}+\frac{t_c}{t_b+t_c} = 1 + \frac{t_b}{t_c}+\frac{t_c}{t_b+t_c}.$$

Így $T \geq 2 + 2(\frac{t_c}{t_b}+\frac{t_b}{t_c}) + 1 \geq 7$, hiszen $\frac{t_c}{t_b}+\frac{t_b}{t_c} \geq 2$. Ezzel pedig (1) a következőképpen alakul:

$$n^2+1 > n + 2\left[\binom{n}{2} - 3\right] + 7 = n^2+1,$$

tehát $n^2+1 > n^2+1$. A kapott ellentmondás azt jelenti, hogy a feladat állítása igaz: minden $i<j<k$-ra teljesül, hogy t_i, t_j és t_k egy háromszög oldalai.