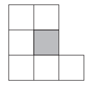
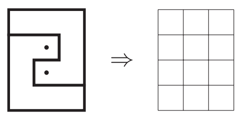
Rácz Béla András megoldása. Feltehetjük, hogy egy lefedett téglalap m, n oldalai egészek, illetve hogy minden horog éppen hat egységnégyzetet fed le, amelyek szerepelnek az egész téglalap egységnégyzetekre bontásában.[1]

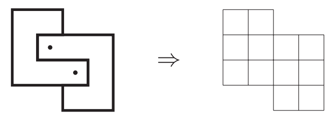


1. ábra

Tekintsünk egy horgot és a hozzá tartozó „középső” mezőt (*1. ábra*). Ez a mező a lefedni kívánt téglalap belsejében van, egy másik horognak tehát le kell fednie. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez csak kétféle módon lehetséges (*2a., 2b. ábra*).



2*a. ábra*

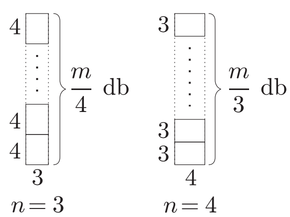


2*b. ábra*

Az egymás „közepét” kölcsönösen lefedő két horgot „összeragasztva” kétféle 12 területű csempét kapunk: a 3×4-es téglalapot és ennek „ferde” formáját. A téglalap területe, $m\cdot n$ tehát osztható 12-vel, hiszen a lefedésben nyilván egész számú csempe vesz részt. Így $3\mid m$ vagy $3\mid n$. Az általánosság megszorítása nélkül föltehető, hogy $3\mid m$. Vizsgáljuk most már azt, hogy m, illetve n a 2-nek milyen hatványával osztható.

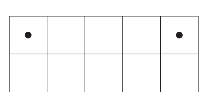
(I) $4\mid m$, azaz $12\mid m$.

Ha $n=1$ vagy 2, akkor a lefedés nyilván lehetetlen, ha $n=3$ vagy 4, akkor a téglalap már 3×4-es csempékkel is lefedhető (*3. ábra*).



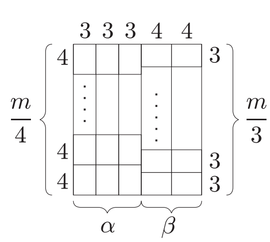
3. ábra

Ha $n=5$, akkor a két „szomszédos” sarokmezőt két különböző csempe fedi csak le, ezek viszont nem férnek el átfedés nélkül (*4. ábra*).



4. ábra

Ha $n\geq 6$, akkor – $12\mid m$ esetén – az $n\times m$-es téglalap lefedhető 3×4-es csempékkel. Ha ugyanis $n=3\alpha+4\beta$, ahol $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$, akkor a megfelelő lefedés az *5. ábrán* látható. Ha pedig $n\geq 6$, akkor létezik a megfelelő felbontás, hiszen $6=3+3$, $7=3+4$, $8=4+4$, végül ha n előáll ilyen alakban, akkor nyilván $n+3$ is.

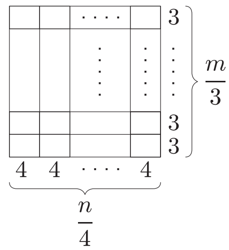


5. ábra

[1] Ennek bizonyítását az értékelés során nem várták el a versenyzőktől; maga a bizonyítás nem nehéz, inkább technikai jellegű.

Vegyük észre, hogy lényegében újra igazoltuk a már tárgyalt $n = 3, 4$ eseteket.

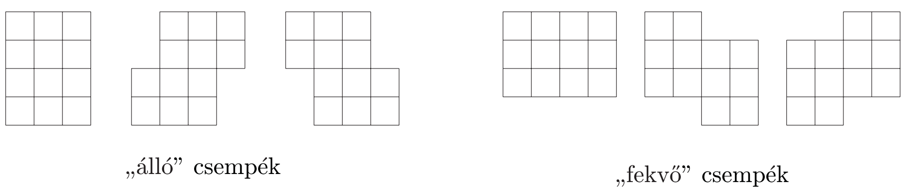
(II) Ha $4 \mid n$, akkor a lefedés nyilván megvalósítható 3×4-es csempékkel (*6. ábra*).



6. ábra

(III) Ha sem (I) sem pedig (II) nem teljesül, azaz $4 \nmid m$ és $4 \nmid n$, akkor $4 \mid mn$ miatt m is és n is páros. Azt állítjuk, hogy ilyenkor a megfelelő lefedésben szükségképpen páros sok csempe vesz részt és így a téglalap területe osztható 8-cal. Ez viszont nem lehetséges, ha egyik oldal hossza sem osztható 4-gyel, így ilyenkor nincs megfelelő lefedés.

Színezzük ki a lefedett téglalap mezőit úgy, hogy minden negyedik oszlop fekete legyen, a többi pedig fehér. Ekkor a fekete mezők száma páros, hiszen minden oszlopban páros sok mező van. Csoportosítsuk a lefedésben részt vevő csempéket a *7. ábra* szerint.



7. ábra

Minden „álló” csempe páros sok fekete mezőt fed le, egy-egy fekvő csempe pedig páratlan sokat (3-at), ezért páros sok „fekvő” csempe vesz részt a lefedésben. Ha pedig az oszlopok helyett minden negyedik sort színezünk feketére, akkor ugyanígy kapjuk, hogy az „álló” csempék száma páros.

Így tehát összesen is páros számú csempe van, a megfelelő lefedés ebben az esetben nem létezik.

Összefoglalva: a lehetséges m és n értékek a következők:

- $3 \mid m$ és $4 \mid n$; és szimmetrikusan • $3 \mid n$ és $4 \mid m$;
- $12 \mid m$ és $n \geq 6$; • $12 \mid n$ és $m \geq 6$.

Megjegyzések. 1. Az adott felsorolásban bizonyos $(m; n)$ számpárok többször is előfordulhatnak.

2. Látható, hogy a „ferde” csempéket nem tudjuk hasznosítani, ami egyáltalán lefedhető, ahhoz elegendőek a 3×4-es csempék is.