Hubai Tamás megoldása. Ha $a=b=c=0$, akkor a feltétel teljesül, így $3P(0)=2P(0)$, vagyis $P(0)=0$. A feltétel nyilván akkor is teljesül, ha $b=c=0$, és így $P(a)+P(0)+P(-a)=2P(a)$, ahonnan $P(-a)=P(a)$ adódik minden valós a-ra. A $P(x)$ polinomfüggvény tehát páros, ami csak úgy lehetséges, ha minden páratlan fokú tagja nulla. (A $P(-a)=P(a)$ feltételt átrendezve ugyanis azt kapjuk, hogy $P(x)-P(-x)$ az azonosan nulla polinom, ebben a különbségben pedig éppen a $P(x)$ páratlan fokú tagjai szerepelnek.)

Legyen ezután $Q(x)$ az a polinom, amelyben $P(x)$ tagjai szerepelnek félakkora kitevővel, azaz amelyre $Q(x^2)=P(x)$ és nézzük meg, minek kell teljesülnie a $Q(x)$ polinomra. Az a, b, c közti összefüggést felhasználva csökkentsük a változók számát. Vezessük be az x és y változókat a következőképpen: legyen $a=x+y+c$, $b=y+c$. Ilyen x és y nyilván minden a, b és c hármashoz létezik, másrészt x és y bármely értékére van olyan a, b, c számhármas, amelyre teljesül a feltétel. Ez egész pontosan azt jelenti, hogy az $a=x+y+c$, $b=y+c$, $ab+bc+ca=0$ egyenletrendszernek létezik (a,b,c) megoldása. Behelyettesítve ugyanis az $(x+y+c)(y+c)+(y+c)c+c(x+y+c)=0$ egyenletet kapjuk, ami rendezés után a c-ben másodfokú:

$$3c^2+(2x+4y)c+(xy+y^2)=0,$$

a diszkriminánsa, $4x^2+4xy+4y^2=2\big(x^2+y^2+(x+y)^2\big)$ pedig nem negatív.

Fejezzük ki a feltételben szereplő mennyiségeket az új változók, x és y segítségével: $a-b=x$, $b-c=y$, $c-a=-x-y$, illetve

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=$$

(felhasználva, hogy a feltétel szerint $ab+bc+ca=0$ és tovább alakítva)

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}=$$

$$=\frac{x^2+y^2+(x+y)^2}{2}=x^2+y^2+xy.$$

A P polinomra tehát, mint láttuk, akkor és csak akkor teljesülnek a feladat feltételei, ha bármely valós x, y számpárra fennáll, hogy

$$P(x)+P(y)+P(x+y)=2P\big(\sqrt{x^2+y^2+xy}\,\big).$$

(Vegyük észre, hogy a bal oldal harmadik tagja eredetileg $P(c-a)=P(-x-y)$, ami most azért írható $P(x+y)$ alakban, mert a P páros függvény.)

A $Q(x)$ polinomra nézve ez azt jelenti, hogy

$$Q(x^2)+Q(y^2)+Q(x^2+y^2+2xy)=2Q(x^2+y^2+xy). \tag{1}$$

Az egyenlőségben x két polinomja áll, melyekben az együtthatók az y változó polinomjai. Tegyük fel, hogy a $Q(x)$ polinom n-edfokú és legyen az $n>1$. A $Q(x)$ főegyütthatójával (1)-ben lehet osztani, föltehető tehát, hogy az 1. Mivel (1)-ben két polinom egyenlősége áll, a két oldalon az x változó minden előforduló hatványának egyenlő az együtthatója. Nekünk az x^{2n-2} tagot érdemes figyelnünk. Ha x^{n-1} együtthatója a $Q(x)$-ben λ, akkor x^{2n-2} együtthatói (1) két oldalán:

$$\lambda+0+\left(\lambda+ny^2+\binom{n}{2}\cdot 4y^2\right)=2\left(\lambda+ny^2+\binom{n}{2}\cdot y^2\right).$$

Rendezés után innen $2\cdot\binom{n}{2}=n$, azaz $n>1$ miatt $n=2$ adódik. Ez azt jelenti, hogy $n\le 2$, a $Q(x)$ tehát legfeljebb másodfokú, a $P(x)$ így legfeljebb negyedfokú páros polinom, amelynek a konstans tagja nulla: $P(x)=\alpha\cdot x^4+\beta\cdot x^2$.

Megmutatjuk, hogy ezekre a polinomokra teljesül a feladat feltétele. Ezt elég abban a két speciális esetben igazolni, ha $P(x)=x^4$, illetve $P(x)=x^2$. Könnyen ellenőrizhető ugyanis, hogy két megoldás összege, illetve egy megoldás számszorosa is megoldás, így pedig valamennyi adott alakú polinomot megkapjuk a fenti két speciális polinomból.

Ha $P(x)=x^4$, akkor

$$2P(a+b+c)-P(a-b)-P(b-c)-P(c-a)=$$

$$=2(a+b+c)^4-(a-b)^4-(b-c)^4-(c-a)^4=$$

$$=12(a^3b+b^3c+c^3a+ab^3+bc^3+ca^3)+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+$$

$$+24(a^2bc+b^2ac+c^2ab)=$$

$$=6(ab+bc+ca)^2+12(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)=0.$$

Ha pedig $P(x)=x^2$, akkor

$$\begin{aligned}
&2P(a+b+c)-P(a-b)-P(b-c)-P(c-a)=\\
&=2(a+b+c)^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2=\\
&=2(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-(a^2+b^2-2ab)-\\
&-(b^2+c^2-2bc)-(c^2+a^2-2ca)=6(ab+bc+ca)=0.
\end{aligned}$$

Ezzel a megoldást befejeztük, a keresett polinomok a $P(x)=\alpha\cdot x^4+\beta\cdot x^2$ alakba írhatók, ahol α és β tetszőleges valós számok.