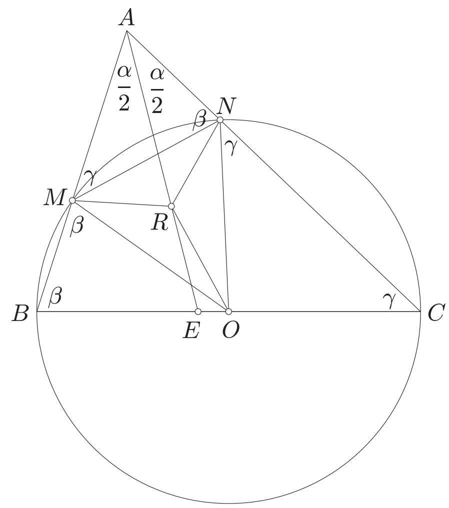
Paulin Roland megoldása. Thálész tétele alapján $BMC\sphericalangle = BNC\sphericalangle = 90°$, így M és N a magasságok talppontjai, melyek az ABC háromszög AB, illetve AC oldalainak belsejében vannak, mert a háromszög hegyesszögű.

$BMNC$ húrnégyszög, így $AMN\sphericalangle = \gamma$, $ANM\sphericalangle = \beta$. OBM és OCN egyenlő szárú háromszögekben $OMB\sphericalangle = \beta$, $ONC\sphericalangle = \gamma$, vagyis $OMN\sphericalangle = ONM\sphericalangle = \alpha$, $MON\sphericalangle = \pi - 2\alpha$.



Belátjuk, hogy a BAC és MON szögek szögfelezői – e és f – nem párhuzamosak, így R egyértelműen meghatározott. $e \parallel f$ esetén legyen $f \cap AC = D$. A DOC háromszögben D-nél $\frac{\alpha}{2}$, C-nél γ, O-nál

$$CON\sphericalangle + \frac{NOM\sphericalangle}{2} =$$

$$= (\pi - 2\gamma) + \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{3}{2}\pi - 2\gamma - \alpha$$

szög van, így a szögösszeg

$$\pi = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{3}{2}\pi - 2\gamma - \alpha.$$

Rendezve:

$$\frac{\alpha}{2} + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha + 2\gamma = \pi = \alpha + \beta + \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \beta \quad \Rightarrow \quad AB = AC.$$

Ezt a feltétel kizárja, így $e \nparallel f$.

Legyen I az OMN háromszög beírt körének középpontja. $IMN\sphericalangle = INM\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$ miatt $MIN\sphericalangle = \pi - \alpha$, ezért $AMIN$ húrnégyszög, így $IAN\sphericalangle = IMN\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. Tehát $I \in e$, ugyanakkor $I \in f$ is teljesül, ezért $R = I$.

Legyen $E = e \cap BC$. Ez a BC oldal egy belső pontja. Belátjuk, hogy a BMR és a CNR háromszögek körülírt köre is átmegy E-n. $REB\sphericalangle = AEB\sphericalangle = \pi - \beta - \frac{\alpha}{2}$, $REC\sphericalangle = AEC\sphericalangle = \pi - \gamma - \frac{\alpha}{2}$, míg $RMB\sphericalangle = \beta + \frac{\alpha}{2}$, $RNC\sphericalangle = \gamma + \frac{\alpha}{2}$, így $RMB\sphericalangle + REB\sphericalangle = RNC\sphericalangle + REC\sphericalangle = \pi$. Azaz $RMBE$ és $RNCE$ húrnégyszögek, így az RMB és az RNC háromszögek körülírt körének van közös pontja a BC oldalon.