Megoldás. Mivel a fal tökéletesen sima, ütközéskor a labdára nem hat forgatónyomaték, tehát a szögsebessége az ütközés során változatlan marad. A labda tömegközéppontjának sebessége az ütközéskor ellentétes irányú lesz, nagysága pedig az eredeti sebesség k-szorosa ($k<1$ az ütközési szám).

A falról visszapattanó labda „köszörülni” kezd, majd az asztallap által kifejtett súrlódási erő előbb-utóbb csúszásmentes gördülésre kényszeríti. A mozgás részletes leírásához szükségünk lesz a labda tehetetlenségi nyomatékára. Mivel a pingponglabda vékony gömbhéj, tehetetlenségi nyomatéka két majdnem egyforma sugarú gömb tehetetlenségi nyomatékának különbségeként adható meg:

$$\Theta=\frac{2}{5}m_1\cdot(r+\Delta r)^2-\frac{2}{5}m_2\cdot r^2,$$

ahol

$$m_1=\frac{4\pi}{3}\varrho\cdot(r+\Delta r)^3,\qquad \text{illetve}\qquad m_2=\frac{4\pi}{3}\varrho\cdot r^3,$$

a gömbhéj tömege és a sűrűsége közötti kapcsolat pedig

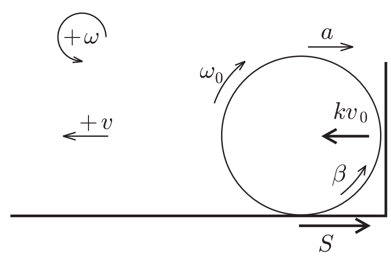
$$m=\frac{4\pi}{3}\varrho\cdot(r+\Delta r)^3-\frac{4\pi}{3}\varrho\cdot r^3.$$

Ezekből a képletekből $\Delta r\ll r$ esetén

$$\Theta=\frac{2}{5}m\frac{(r+\Delta r)^5-r^5}{(r+\Delta r)^3-r^3}\approx\frac{2}{3}mr^2$$

adódik.

Az *ábra* egy v_0 sebességgel, ω_0 szögsebességgel ($v_0=r\omega_0$) a falnak ütköző labdát ábrázol közvetlenül az ütközés után.



Az ábrán bejelölt v és ω irányokat tekintve pozitívnak, a mozgásegyenletek:

$$S=ma,\qquad Sr=\Theta\beta,$$

ezekből a gyorsulás és a szöggyorsulás

$$a=\frac{S}{m},\qquad \beta=\frac{Sr}{\Theta}=\frac{3}{2}\cdot\frac{S}{mr},$$

tehát t idő múlva a labda sebességének és szögsebességének előjeles nagysága:

$$v=kv_0-at,\qquad \omega=\beta t-\omega_0.$$

A csúszásmentes gördülés akkor kezdődik, amikor $v=r\omega$ vagyis

$$kv_0-\frac{S}{m}t=\left(\frac{Sr}{\Theta}t-\omega_0\right)r$$

fennáll, tehát

$$t=\frac{kv_0+r\omega_0}{1+\frac{mr^2}{\Theta}}\cdot\frac{m}{S}=\frac{2}{5}\cdot\frac{m}{S}v_0(k+1)$$

idő múlva, s ekkor a labda sebessége

$$v=v_1=\frac{3k-2}{5}v_0.$$

Látható, hogy ha $k\ge\frac{2}{3}$, akkor $v_1\ge 0$, vagyis a köszörülés befejeztekor a labda balra mozog (vagy éppen megáll), ilyenkor nem ütközhet ismét a fallal.

Második ütközés csak akkor következik be, ha $k<\frac{2}{3}$, tekintsük tehát ezt az esetet. Amennyiben a labda csúszásmentesen gördülve ér vissza a falhoz

$$|v_1|=\frac{2-3k}{5}v_0$$

sebességgel, akkor ugyanaz történik, mint az első ütközés után, csak v_1 játssza v_0 szerepét, azaz köszörülés, majd tiszta gördülés után a labda

$$|v_2| = \frac{2-3k}{5}\,|v_1| = \left(\frac{2-3k}{5}\right)^2 v_0$$

sebességgel harmadszor is nekiütközik a falnak, és így tovább (elvben) a végtelenségig. Pontosan 2 ütközés tehát ebben az esetben sem valósulhat meg.

Előfordulhat-e az, hogy a labda hamarabb ér vissza a falhoz, mintsem a tiszta gördülés feltétele teljesülhetne? Ennek feltétele az, hogy a kv_0 kezdősebességgel és a gyorsulással mozgó labdának a falhoz visszaérkezéséig eltelő t_0 idő kisebb legyen, mint a köszörülés megszűnéshez szükséges, korábban kiszámított t idő:

$$t_0 = 2\,\frac{kv_0}{a} < \frac{2}{5}\cdot\frac{m}{S}\cdot v_0(k+1) = \frac{2}{5}\cdot\frac{v_0}{a}\,(k+1) = t,$$

ami $k < \dfrac{1}{4}$ esetén áll fenn.

Vizsgáljuk a továbbiakban ezt az esetet! A labda az első és a második ütközés között ugyanannyi ideig lassult, mint gyorsult, tehát a sebességének nagysága a második ütközés előtt ugyanakkora, mint az első ütközés után, nevezetesen kv_0, a második ütközést követően tehát a labda k^2v_0 sebességgel pattan el a faltól. A szögsebesség közvetlenül a második ütközés előtt (és ami ezzel egyező, közvetlenül utána is) a forgómozgás egyenletéből kapható meg:

$$\omega_1 = -\omega_0 + \beta\, t_0 = -\omega_0 + \frac{3}{2}\cdot\frac{S}{mr}\cdot 2\,\frac{kv_0}{a} = (3k-1)\,\omega_0.$$

A második ütközés után a köszörülés addig tart, míg fenn nem áll

$$k^2v_0 - at = \omega_1 + r\beta\, t = (3k-1)\,r\omega_0 + \frac{3}{2}\cdot\frac{a}{r}\cdot rt,$$

ez pedig

$$t = t' = \frac{2}{5}\cdot\frac{v_0}{a}\,(k^2-3k+1)$$

idő múlva következik be. Ennyi idő alatt a labda sebessége

$$v' = v_1 - at' = k^2v_0 - \frac{2}{5}(k^2-3k+1)\,v_0 = \frac{1}{5}(3k^2+6k-2)\,v_0$$

lesz. Ha ez a sebesség pozitív lenne, akkor harmadik ütközés nem jöhetne létre. A $3k^2+6k-2$ kifejezés azonban csak

$$k > \sqrt{\frac{5}{3}} - 1 \approx 0{,}29 > \frac{1}{4},$$

illetve $k < -2{,}29$ tartományban lenne pozitív. Számunkra mindkét lehetőség elfogadhatatlan, az első azért, mert ellentmond a köszörülve ütközés $k < \dfrac{1}{4}$ feltételének, a másik tartomány pedig fizikailag értelmetlen.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy $k \geq \dfrac{2}{3}$ esetén pontosan 1 ütközés zajlik le, $\dfrac{2}{3} > k \geq \dfrac{1}{4}$ esetén tetszőlegesen sok ütközés, és ha $k < \dfrac{1}{4}$, akkor is legalább 3-szor ütközik a labda a falnak. Pontosan kettő ütközés tehát *nem jöhet létre!*