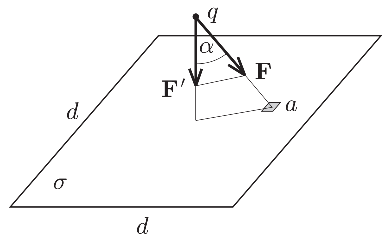
Megoldás. Osszuk fel gondolatban a lemezt sok kicsiny, egyenként a nagyságú felületdarabkára! Mivel a lemez töltése egyenletes, a felületi töltéssűrűsége (egységnyi felületre jutó töltése) mindenütt $\sigma = \dfrac{Q}{d^2}$, a vizsgált lemezdarabka töltése pedig σa. A Coulomb-törvény szerint a lemezdarabka

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\sigma a}{r^2}$$

nagyságú erőt fejt ki a ponttöltésre (r a felületdarabka és a ponttöltés távolsága). A rendszer szimmetriájából adódóan a ponttöltésre ható erő a lemezre merőleges kell legyen, az $\mathbf{F}$ erőnek tehát csak a felületre merőleges

$$F' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\sigma a}{r^2} \cdot \cos\alpha$$

komponense játszik szerepet az eredő erő kiszámításánál (*1. ábra*).



1. ábra

Vizsgáljuk meg ezek után a ponttöltés elektromos terének a kérdéses felületdarabkán áthaladó fluxusát! A térerősség nagysága a felületdarabka helyén

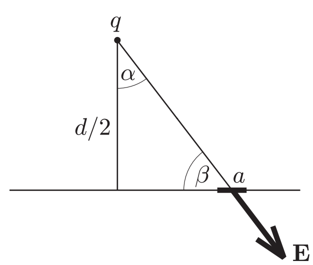
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2},$$

a fluxus tehát

$$\Psi = E \cdot a \cdot \sin\beta,$$

ahol β az elektromos térerősség és a felület síkja által bezárt szög (*2. ábra*). Mivel $\beta = 90^\circ - \alpha$, a fluxus így is felírható:

$$\Psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qa}{r^2} \cdot \cos\alpha.$$



2. ábra

Vegyük észre, hogy a felületdarabka által kifejtett F' erő arányos a vizsgált felületdarabkán áthaladó elektromos fluxussal: $F' = \sigma \cdot \Psi$, és ugyanez a kapcsolat a ponttöltésre ható eredő erő és a négyzetlapon áthaladó teljes elektromos fluxus között is: $F_{\text{eredő}} = \sigma \cdot \Psi_{\text{négyzet}}$.

Hogyan határozhatjuk meg a négyzetlapon áthaladó elektromos fluxust? Használjuk ki, hogy a ponttöltés $d/2$ távol van a lemeztől, vagyis éppen egy olyan kocka középpontjában, amelynek egyik lapja a négyzet alakú szigetelő lemez (*3. ábra*). Gauss törvénye szerint egy q töltésű pontszerű testből kiinduló teljes fluxus

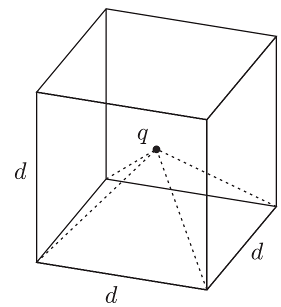
$$\Psi_{\text{teljes}} = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

és ez a fluxus – a szimmetria miatt – egyenletesen oszlik meg a kocka 6 lapja között:

$$\Psi_{\text{négyzet}} = \frac{1}{6} \cdot \Psi_{\text{teljes}} = \frac{q}{6\varepsilon_0},$$

a ponttöltésre ható erő tehát

$$F_{\text{eredő}} = \frac{\sigma q}{6\varepsilon_0} = \frac{1}{6\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2}.$$



3. ábra

Megjegyzés. Integrálszámítás segítségével a lemezre merőleges szimmetriatengely tetszőleges pontjában kiszámítható a ponttöltésre ható erő. Ha a q töltésű test x távolságban van a lemeztől, akkor rá

$$F(x) = \frac{qQ}{\pi\varepsilon_0 d^2} \cdot \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{d}{2x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{2xd}{d^2 + 4x^2 + d\sqrt{2d^2 + 4x^2}}\right)\right]$$

erő hat.

Három határesetben is tanulságos a fenti kifejezés vizsgálata:

a) Ha $x \ll d$, akkor a szögletes zárójelben álló kifejezés $\pi/2$-höz tart, ilyenkor $F = \dfrac{qQ}{2\varepsilon_0 d^2}$. Ez egy nagyméretű síkkondenzátor belsejében levő ponttöltésre ható erő esetének felel meg.

b) Ha $x \gg d$, akkor a szögletes zárójelben álló kifejezés $(2d/x)^2$-tel közelíthető, az erőhatás pedig két pontszerűnek tekinthető töltés közötti Coulomb-erő képletével számítható.

c) Végül tekintsük a feladatban szereplő $x = d/2$ esetet! A szögletes zárójelben szereplő kifejezés ekkor

$$\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\left(2 - \sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6},$$

az erő tehát az elemi úton is megkapható $\dfrac{qQ}{6\varepsilon_0 d^2}$-tel egyezik meg.