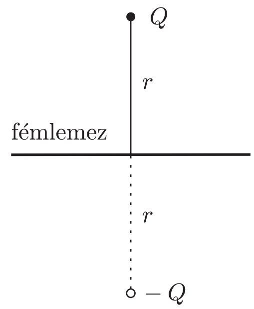
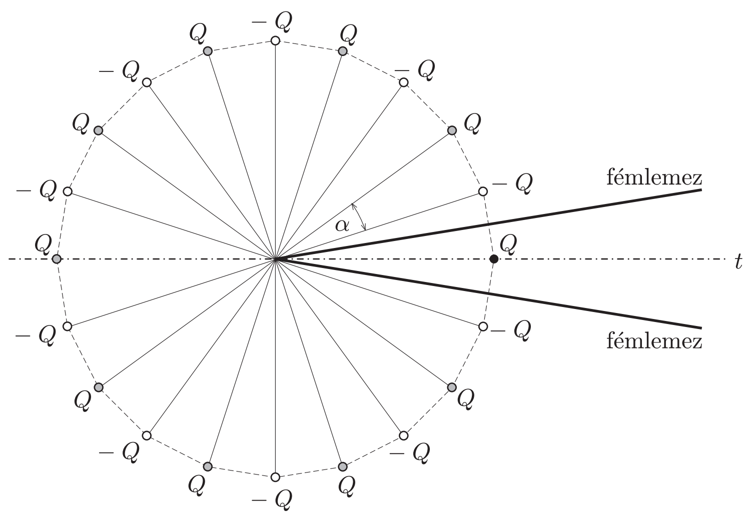
Megoldás. A feladatot a töltéstükrözés segítségével oldjuk meg. Az a) esetben egyetlen fémlapról van szó, ekkor egyetlen tükrözés elegendő (*1. ábra*).



1. ábra

A b) esetben a pálcát tükröznünk kell mindkét fémlapra, majd a „tükörpálcákat” is tükrözzük a fémlapokra, és az eljárást addig folytatjuk, amíg új tükörpálcát kapunk. A töltés minden tükrözésnél (-1)-szeresére változik.

A módszer csak akkor alkalmazható, ha a valódi töltések által elfoglalt térrészbe *nem* kerül tükrözött töltés. Ez akkor teljesül, ha $2n \cdot \alpha = 360^\circ$, ahol n pozitív egész (*2. ábra*). (Az eljárás úgy is megfogalmazható, hogy a töltések tükrözése után a fémlapokat is tükrözzük egymásra, és ezt addig folytatjuk, amíg minden tükrözött töltést tükröztünk az őt közbezáró tükrözött lapokra is.)



2. ábra

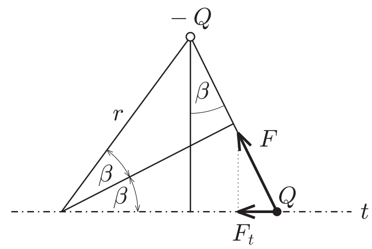
Az eredeti és a tükrözött töltések az eredeti töltések által elfoglalt térrészben olyan elektromos mezőt hoznak létre a fémlapok nélkül, mint amilyet a valódi töltések és a fémlapok együtt.

Meg kell határoznunk egy L hosszúságú, egyenletesen elosztott Q töltésű pálca elektromos terét. Képzeljünk el egy R sugarú, L hosszúságú hengert, amelynek a töltött pálca a szimmetriatengelye. A henger palástján az elektromos térerősség (szimmetria-okokból) mindenhol ugyanakkora nagyságú, és merőleges a palást érintősíkjára (a henger adott pontjához tartozó sugarának irányába esik). A henger palástján átmenő teljes elektromos fluxus, $E \cdot 2\pi RL$ a Gauss-törvény szerint Q/ε_0-lal egyenlő, ezért a térerősség nagysága

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 LR}.$$

Az a) esetben a tükörpálca elektromos térerőssége a valódi pálca pontjaiban $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 LR}$ nagyságú. A pálcára ható, $\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 LR}$ nagyságú erő a tükörkép, tehát a fémlap felé mutat. (A valóságban ezt az erőt a fémlap megosztott töltései fejtik ki a pálcára.)

A b) esetben a valódi pálcának és a tükörpálcáknak a pálcára merőleges síkmetszete szabályos 20-szöget alkot. A pálcára ható erő a többi (19 darab) tükörrúd által kifejtett erő eredője, amely – a szimmetria miatt – a pálcára merőleges és a fémlapok metszésvonala felé mutat. Elegendő tehát az egyes tükörpálcák által kifejtett erőnek a metszésvonal felé mutató (t irányú) komponensét kiszámítani, majd ezeket az erőkomponenseket összegezni.



3. ábra

Tekintsük azt a tükörpálcát, amelynek síkmetszete és a pálca metszete a szabályos 20-szögben 2β középponti szöget zár be (*3. ábra*). Ennek a két pálcának a távolsága $R = 2r\sin\beta$, a közöttük ható erő nagysága tehát

$$F(\beta) = \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 LR} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 Lr\sin\beta},$$

iránya pedig a tükörtöltés előjelétől függően vonzó vagy taszító. Ennek az erőnek a fémlemezek t szögfelezőjével párhuzamos összetevője

$$F_t = F(\beta)\cdot\sin\beta = \pm\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 Lr},$$

nagysága tehát *nem függ* a β szögtől, csupán az iránya változik a tükörtöltés előjelétől függően (a pálcával ellentétes tükörtöltés esetén a fémlapok metszésvonala felé, egyforma töltések esetén pedig az ellenkező irányba mutat).

Mivel a 19 tükörpálcából 10-nek a töltése $-Q$, 9-nek pedig $+Q$, az eredő erő ugyanakkora, mintha csak egyetlen tükörpálca lenne, tehát (irányát és nagyságát tekintve) az a) esetben kiszámítottal egyezik meg.

Megjegyzések. 1. Látható, hogy az eredmény tetszőleges $\alpha = 180^\circ/n$ hajlásszögre igaz (n pozitív egész). Felsőbb matematikai eszközökkel belátható, hogy a pálcára ható elektromos erő akkor is független a fémlapok által bezárt szögtől, amikor n nem egész, tehát amikor a töltéstükrözés módszere nem alkalmazható.

2. Hibásak azok a megoldások, amelyek a pálca elektromos terét (a ponttöltés teréhez hasonlóan) $1/r^2$-tel arányosnak tekintették. A térerősség $1/r$-es távolságfüggése vezet az egyszerű végeredményre.