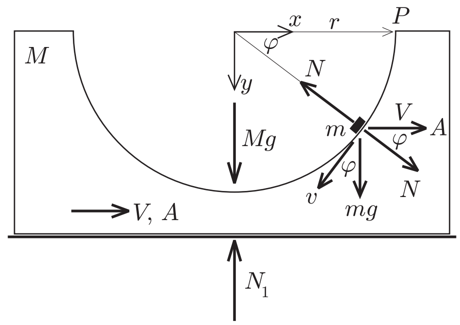
I. megoldás. Jelöljük a mélyedés sugarát r-rel, a kérdéses nyomóerő nagyságát pedig (a φ szögű helyzetben) N-nel! A kis testre az mg gravitációs erő és a hasáb nyomóereje hat. A hasábra a kis testre kifejtett nyomóerő ellenereje, az Mg gravitációs erő és az asztal által kifejtett N_1 nyomóerő hat.



A hasábra ható erők függőleges komponensei kiegyenlítik egymást, hiszen a hasáb függőleges irányban nem gyorsul. A hasáb vízszintes irányú A gyorsulását a vízszintes erők eredője (jelen esetben a kis test nyomóerejének vízszintes komponense) határozza meg:

$$A=\frac{N\,\cos\varphi}{M}. \tag{1}$$

A kis test a hasábhoz képest körmozgást végez. Jelöljük a kis testnek a hasábhoz viszonyított (relatív) sebességét (a kérdéses helyzetben) v-vel! Ezen sebesség segítségével ki tudjuk számítani a kis test hasábhoz viszonyított gyorsulásának sugár irányú komponensét:

$$a_r=\frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

Írjuk fel a kis test Newton-féle mozgástörvényének sugár irányú komponensét az asztalhoz rögzített (nem gyorsuló) koordináta-rendszerben:

$$N-mg\,\sin\varphi=m(a_r-A\cos\varphi). \tag{3}$$

Az (1) és (2) egyenletekből meg tudnánk határozni a keresett N erőt, ha a_r-t ismernénk, ehhez viszont (2) alapján a v ismeretére lenne szükségünk. A relatív sebesség meghatározására az energiamegmaradás törvénye nyújt lehetőséget.

A kis testnek az asztalhoz viszonyított sebességét a

$$v_y=v\cos\varphi \tag{4}$$

függőleges és a

$$v_x=V-v\sin\varphi \tag{5}$$

vízszintes komponensekkel jellemezhetjük, ahol V a hasáb sebessége az asztalhoz képest. Az impulzusmegmaradás törvénye szerint a rendszer kezdeti (nulla) impulzusának vízszintes komponense a mozgás során nem változik:

$$mv_x+MV=0. \tag{6}$$

Végül az energiamegmaradás törvénye:

$$\frac{1}{2}m\big(v_x^2+v_y^2\big)+\frac{1}{2}MV^2=mgr\sin\varphi. \tag{7}$$

A (4)–(7) egyenletekből kiszámíthatjuk a kis test és a hasáb relatív sebességét:

$$v=\sqrt{\frac{2(M+m)gr\sin\varphi}{M+m\cos^2\varphi}},$$

majd ebből az (1)–(3) egyenletek segítségével adódik a keresett nyomóerő:

$$N(\varphi)=\frac{3M+2m+m\cos^2\varphi}{\left(M+m\cos^2\varphi\right)^2}\,Mmg\sin\varphi. \tag{8}$$

Ez az erő kezdetben (a P pontnál) nulla, φ növekedtével egyre nő, és $\varphi = 90°$-nál éri el a maximumát: $N_{\max} = \left(3 + \frac{2m}{M}\right) mg$. Ha $M \gg m$ (rögzítettnek tekinthető hasáb esete), akkor a kis test a pálya legalsó pontjában a nyugvó helyzetben mérhető súlyának 3-szorosával nyomja a hasábot. A másik határeset: $M \ll m$, ekkor a kis test csaknem szabadon esik, a nyomóerő majdnem mindig elhanyagolhatóan kicsi, csupán az alsó fordulópontban válik egy rövid időre nagyon naggyá.

II. megoldás. Jelöljük (az I. megoldás ábráján bejelölt koordináta-rendszer irányítását használva) a hasáb elmozdulását X-szel, a kis test koordinátáit pedig x-szel és y-nal! A rendszer tömegközéppontjának vízszintes koordinátája – vízszintes külső erő hiányában – nem változhat meg:

$$\frac{mx + MX}{m + M} = \frac{mr}{m + M}. \tag{9}$$

Másrészt a kis test a mélyedés középpontjától mindvégig r távolságra kell legyen:

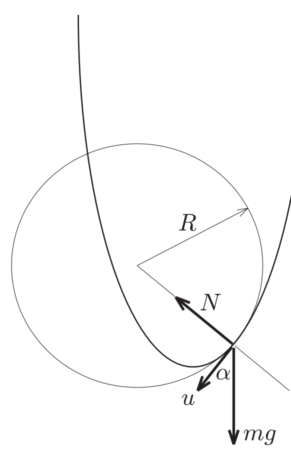
$$(x - X)^2 + y^2 = r^2, \tag{10}$$

ahonnan (9) felhasználásával

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{11}$$

adódik, ahol $a = \frac{M}{M+m} r$, $b = r$ és $x_0 = \frac{m}{M+m} r$. (11) egy olyan ellipszis egyenlete, amelynek féltengelyei a és b hosszúak, és a középpontja az $(x_0; 0)$ koordinátájú pont.

Az energiamegmaradás törvényének felhasználásával a pálya bármely pontjában meg tudjuk adni a kis test (inerciarendszerbeli) sebességének nagyságát (jelöljük ezt u-val), és a sebesség irányát is (legyen a sebességvektor függőlegessel bezárt szöge α).



A mozgásegyenletnek a pillanatnyi sebességre merőleges komponense szerint

$$N - mg \sin \alpha = m \frac{u^2}{R}, \tag{12}$$

ahol R az ellipszis megfelelő pontjához tartozó görbületi sugara. Ez utóbbi a matematikai kézikönyvekben megtalálható képletekkel kiszámítható, de elemi eszközökkel, pl. a bolygómozgás vagy a rezgőmozgás fizikai törvényeiből is meghatározható:

$$R = a^2 b^2 \left[\frac{(x - x_0)^2}{b^4} + \frac{y^2}{b^4} \right]^{3/2}.$$

Innen (12) alapján (u kiszámítható értékének felhasználásával) a nyomóerő nagyságának φ-vel kifejezett értékére az I. megoldásban megkapott (8) képlet adódik.