

Mutassuk meg, hogy az $\log(1 + a^x)$ és $\sqrt{1 + x^2}$ függvények konvexek.
Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \sqrt[k]{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)} \geq 1 + \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k},$$

és

$$(2) \quad \sqrt{k^2 + (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2} \leq \sqrt{1 + a_1^2} + \sqrt{1 + a_2^2} + \dots + \sqrt{1 + a_k^2}.$$

Mikor állhat fönn egyenlőség?