Megoldás. A polinomot eloszthatjuk az a_n főegyütthatóval; ezzel a bizonyítandó állítás nem változik. A továbbiakban feltehetjük, hogy $a_n = 1$.

Az f polinom első- és másodfokú tényezőkre bontható:

$$f(x) = \prod_i (x + p_i) \cdot \prod_j (x^2 + q_j x + r_j),$$

ahol p_i, q_j, r_j valós számok. A p_i számok a valós gyökök ellentettjei, a q_j számok a komplex gyökök valós részének (-2)-szeresei, az r_j számok pedig komplex gyökök abszolút értékének négyzetei, ezért mindegyikük pozitív. A tényezők összeszorzásából kapjuk, hogy az $a_0, \ldots, a_{n-1}$ együtthatók is mind pozitívak.

Az együtthatók sorozatát terjesszük ki mindkét irányban az $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$ és $a_{-1} = a_{-2} = \ldots = 0$ értékekkel. Az állítást $n \geq 1$ és $-1 \leq k \leq n-2$ esetén bizonyítjuk n szerinti teljes indukcióval.

Az $n \leq 2$ esetben az állítás triviális: a_{k+1} és a_{k+2} pozitív, miközben a_k és a_{k+3} közül legalább az egyik 0; tehát, $0 = a_k a_{k+3} < a_{k+1} a_{k+2}$.

Legyen most $n \geq 3$ és tételezzük fel, hogy az állítás minden kisebb értékre igaz. Vegyük az f polinom egy $x^2 + px + q$ alakú osztóját, ahol p és q pozitív valós számok. (Ilyen osztót egy konjugált gyökpárból kaphatunk, vagy pedig két negatív valós gyökből.) Ekkor

$$f(x) = (x^2 + px + q)(b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0) = (x^2 + px + q)g(x). \tag{1}$$

A $g(x)$ polinom gyökei is a bal félsíkban vannak, tehát $b_k b_{k+3} < b_{k+1} b_{k+2}$ minden $-1 \leq k \leq n-4$ esetén. Definiálva $b_{n-1} = b_n = \ldots = 0$ és $b_{-1} = b_{-2} = \ldots = 0$ értékeket is, minden egész k-ra igaz, hogy $b_k b_{k+3} \leq b_{k+1} b_{k+2}$.

Most igazoljuk, hogy $a_k a_{k+3} < a_{k+1} a_{k+2}$. Ha $k = -1$ vagy $k = n-2$, akkor ez triviális, mert $a_{k+1} a_{k+2}$ pozitív és $a_k a_{k+3} = 0$. Tegyük fel tehát, hogy $0 \leq k \leq n-3$. Az (1)-ben elvégezve a szorzást,

$$\begin{aligned} a_{k+1}a_{k+2} - a_k a_{k+3} &= (qb_{k+1} + pb_k + b_{k-1})(qb_{k+2} + pb_{k+1} + b_k) - \\ &\quad - (qb_k + pb_{k-1} + b_{k-2})(qb_{k+3} + pb_{k+2} + b_{k+1}) = \\ &= (b_{k-1}b_k - b_{k-2}b_{k+1}) + p(b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2}) + q(b_{k-1}b_{k+2} - b_{k-2}b_{k+3}) + \\ &\quad + p^2(b_k b_{k+1} - b_{k-1}b_{k+2}) + q^2(b_{k+1}b_{k+2} - b_k b_{k+3}) + pq(b_{k+1}^2 - b_{k-1}b_{k+3}). \end{aligned} \tag{2}$$

Megmutatjuk, hogy mind a hat tag nemnegatív és legalább az egyikük pozitív.

Az indukciós feltevést az $n' = n-2$ és $k' = k-1$ számokra és a g polinomra alkalmazva láthatjuk, hogy $-1 \leq k' \leq n'-2$, ezért

$$p^2(b_k b_{k+1} - b_{k-1}b_{k+2}) > 0.$$

A $b_{k-1}b_k - b_{k-2}b_{k+1}$ és $q^2(b_{k+1}b_{k+2} - b_k b_{k+3})$ tagok szintén nemnegatívak.

A többi három tag előjelének vizsgálatához tekintsük a

$$b_{k+1}(b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2}) = b_k(b_k b_{k+1} - b_{k-1}b_{k+2}) + b_{k+2}(b_k b_{k+1} - b_{k-2}b_{k+1}) \geq 0,$$

$$b_k(b_{k+1}^2 - b_{k-1}b_{k+3}) = b_{k-1}(b_{k+1}b_{k+2} - b_k b_{k+3}) + b_{k+1}(b_k b_{k+1} - b_{k-1}b_{k+2}) \geq 0$$

és

$$\begin{aligned} &b_{k+1}(b_{k-1}b_{k+2} - b_{k-2}b_{k+3}) = \\ &= b_{k-1}(b_{k+1}b_{k+2} - b_k b_{k+3}) + b_{k+3}(b_{k-1}b_k - b_{k-2}b_{k+1}) \geq 0 \end{aligned}$$

egyenlőtlenségeket. Mivel $0 \leq k, k+1 \leq n-2$, a b_k és b_{k+1} számok pozitívak, és oszthatunk velük. Így tehát $b_k^2 - b_{k-2}b_{k+2}$, $b_{k+1}^2 - b_{k-1}b_{k+3}$ és $b_{k-1}b_{k+2} - b_{k-2}b_{k+3}$ is nemnegatív.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Az indukciós lépés valamivel egyszerűbben is elvégezhető, ha az f polinomnak van valós gyöke, és egy elsőfokú tényezőt is ki tudunk emelni. Ugyanakkor, ha nincs valós gyök, nem tudjuk elkerülni a fent látott indukciós lépést.

2. Több versenyző elfeledkezett a $k = 0$, $k = 1$, $k = n-4$ és $k = n-3$ esetek diszkutálásától. Ezekben az esetekben már a (2) képletben is érvénytelen indexek szerepelnek – ez feloldható például a látott módon azzal, hogy az együtthatók sorozatát kiegészítjük néhány 0-val. A másik probléma, amit a diszkusszió hiánya okozott, hogy az indukciós feltevést olyan n' és k' esetekben is alkalmazták, amikor a $0 \leq k' \leq n'-3$ feltétel nem teljesült.

3. Egy másik gyakori hiba volt, hogy az állítást közvetlenül csupán az $n = 3$ esetben ellenőrizték. Ahhoz, hogy az indukció működjön, két szomszédos érték vizsgálatára van szükség, mert az indukciós lépést az $n' = n-2$ értékre is alkalmaztuk.